

Variabilita měření a statistická regulace procesu

Ing. Darja Noskievičová, CSc.

Katedra kontroly a řízení jakosti, VŠB-TU Ostrava

Abstrakt: Efektivnost využití statistických metod pro analýzu a řízení procesů je odvislá mj. od účinnosti měřicího systému a způsobilosti měřidel. Chyby měření mohou ve velké míře ovlivnit schopnost správně analyzovat vlastní variabilitu procesu a nevhodně se tak promítnout do rozhodování o realizaci zásahů do procesu. Předložený příspěvek se zabývá analýzou vlivu chyb měření na účinnost regulačních diagramů a metodikou analýzy systematické chyby měření (strannost), založenou na aplikaci regulačních diagramů.

Klíčová slova: chyby měření, regulační diagramy, strannost, variabilita měření

1. Úvod

Každý závěr nebo rozhodnutí plynoucí z aplikace statistických metod jsou podmíněny kvalitou analyzovaných dat. Také účinnost regulačních diagramů je ovlivněna výskytem chyb měření.

Chyby měření jsou spojeny s objektivní existencí variability měření. Druhy variability lze rozčlenit do 5 kategorií: strannost (systematická chyba), opakovatelnost, reprodukovatelnost, stabilita, linearita.

Chyba měření ε je dána rozdílem mezi naměřenou (empirickou) hodnotou x_i a pravou hodnotou x měřené veličiny, tj.

$$\varepsilon = x_i - x. \quad (1)$$

Takto vyjádřená chyba se nazývá chybou absolutní. Někdy se udává jako relativní chyba ε^r , pro kterou platí:

$$\varepsilon^r = \frac{\varepsilon}{x}, \text{ popř. } \varepsilon^r = \frac{\varepsilon}{x} \cdot 100 (\%) \quad (2)$$

Chyby měření mohou být způsobeny:

- nepřesností měřidel (způsobeno např. nedodržením tolerancí u jednotlivých součástí přístroje, chybami justace při montáži přístroje, špatnou konstrukcí přístroje...)
- etalonem použitým ke kalibraci měřidla nebo špatným seřízením měřidla
- měřicí silou, tlakem (může vyvolat deformaci měřeného objektu)
- měřicí metodou
- prostředím (zejména teplotou)
- operátorem (chyby zaviněné nedokonalostí lidských smyslů, chyby z nedbalosti, neopatrnosti, neznalosti).

Abstrahujeme-li od hrubých chyb, způsobených např. nesprávným provedením měření, nesprávným čtením údajů, použitím vadného přístroje apod., členíme chyby měření do dvou základních skupin, a to na chyby systematické (strannost) a chyby náhodné. Chyby systematické jsou vyvolány vlivy, které působí trvale a jednoznačně co do smyslu a velikosti (např. systematické zaokrouhlování hodnot na vyšší hodnoty, konstrukční nepřesnosti přístroje, nepřesnosti normálu, chyby pozorování, vliv měřicí síly či tlaku, okolní teplota). Systematická chyba je taková chyba, která při opakovaném měření téže hodnoty dané veličiny za stejných podmínek zůstává stejná (v absolutní hodnotě i znaménku). Systematické chyby členíme na:

- systematické chyby známé (mají určitou hodnotu a znaménko a lze je odstranit vhodnou korekcí),
- systematické chyby neznámé (nemají určité znaménko a jsou zahrnuty do nejistoty měření. Při výpočtu nejistoty se s nimi pracuje jako s náhodnými chybami).

Označíme-li si velikost systematické chyby c , pak pro naměřenou hodnotu měřené veličiny platí:

$$x_i = x + c. \quad (3)$$

Protože pravé hodnoty x představují realizace náhodné proměnné X (měřené veličiny) a naměřené hodnoty x_i představují realizace empirické proměnné X^e , platí:

$$X^e = X + c \quad (4)$$

Ve skutečnosti tedy při statistickém vyhodnocování dat pracujeme s empirickou proměnnou X^e , nikoliv s pravou proměnnou X .

Chyby náhodné jsou vyvolány nepravidelnými náhodnými vlivy, které působí dle okamžitých podmínek jednotlivých měření. Chovají se jako náhodná proměnná a lze je popsat pomocí normálního rozdělení. Náhodné chyby se spolu s neznámými systematickými chybami zahrnují do nejistoty měření.

Náhodné chyby měření můžeme modelovat pomocí náhodné proměnné V . Nejčastěji se v praxi vyskytuje případ, kdy mezi znakem jakosti X a náhodnou chybou měření V je aditivní vztah (Mittag, H.J. and Rinne, H., 1993). Pak ve skutečnosti pracujeme s náhodnou proměnnou $X^e = X + V$. (Předpokládá se, že X a V jsou statisticky nezávislé proměnné).

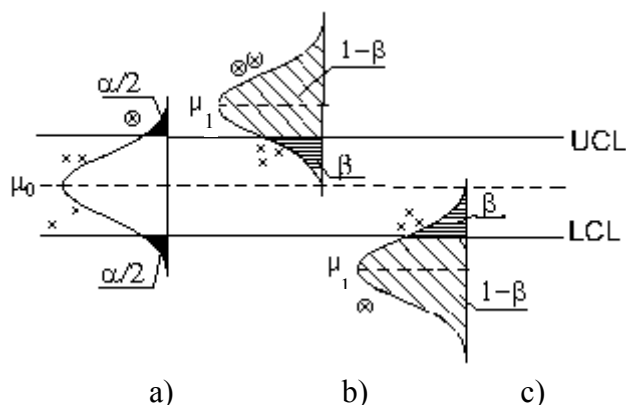
2. Chyby měření a účinnost regulačního diagramu

Účinnost regulačního diagramu lze vyjádřit následovně:

Regulační meze jsou stanoveny v takové vzdálenosti od střední přímky, aby:

- signál o tom, že proces je statisticky nestabilní (nezvládnutý), i když ve skutečnosti je statisticky stabilní, byl vydáván co nejméně často (co nejmenší riziko zbytečného signálu α),
- signál o tom, že došlo k nepřijatelné odchylce procesu, byl vydán co nejdříve (co nejmenší riziko chybějícího signálu β , resp. co největší pravděpodobnost odhalení nepřijatelné odchylky $1-\beta$).

Význam rizik α a β , resp. pravděpodobnosti $1-\beta$ je patrný z obrázku 1.



μ_0 je požadovaná průměrná úroveň regulované veličiny
 μ_1 je průměrná úroveň regulované veličiny po změně procesu

Obr. 1 Riziko zbytečného signálu α a riziko chybějícího signálu β

Hodnota α se nazývá *riziko zbytečného signálu* a představuje pravděpodobnost zbytečného hledání vymezipitelného vlivu na základě informace z regulačního diagramu o tom, že proces není ve statisticky zvládnutém stavu (např. bod mimo akční meze), i když ve skutečnosti

k žádné významné změně procesu nedošlo (obr. 1a). S tímto nesprávným závěrem jsou spojeny náklady na pokus najít příčinu neexistujícího problému. hodnota β se *riziko chybějícího signálu* a je to pravděpodobnost, že regulační diagram neodhalí nepřipustnou změnu procesu včas (všechny body daného testového kritéria leží uvnitř regulačních mezí a netvoří žádné nenáhodné seskupení). S tímto nesprávným závěrem jsou zase spojeny náklady vyvolané tím, že se do procesu včas nezasáhlo. Na obr. 1b a 1c je situace zobrazena pro posun střední úrovně regulované veličiny z μ_0 na μ_1 . Hodnota $(1-\beta)$, obecně nazývaná *silofunkce* testu, zde vyjadřuje pravděpodobnost detekce nepřipustné změny procesu, která má být včas odhalena.

Za předpokladu, že neexistuje žádná chyba měření, lze riziko α (tj. jeho pravou hodnotu), stanovit ze vztahu:

$$\alpha = P(X > UCL) + P(X < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL - \mu_0}{\sigma_0}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - \mu_0}{\sigma_0}\right). \quad (5)$$

Pravděpodobnost včasného odhalení nepřipustné odchylky v procesu $1-\beta$ (tj. pravou hodnotu této pravděpodobnosti) pak určíme ze vztahu:

$$1-\beta = P(X > UCL) + P(X < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL - \mu_1}{\sigma_0}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - \mu_1}{\sigma_0}\right). \quad (6)$$

kde

μ_0 je přípustná úroveň střední hodnoty regulované veličiny,

μ_1 je nepřipustná úroveň střední hodnoty regulované veličiny,

σ_0 je přípustná směrodatná odchylka regulované veličiny,

$\Phi\left(\frac{UCL - \mu_0}{\sigma_0}\right)$ je hodnota distribuční funkce normovaného normálního rozdělení v bodě

$$\left(\frac{UCL - \mu_0}{\sigma_0}\right).$$

Chyby měření tedy ovlivňují rozhodování o tom, zda je nutné učinit zásah do procesu (např. seřídít ho) nebo zda proces ponechat bez zásahu.

V další kapitole je provedena analýza změn rizika α a pravděpodobnosti $1-\beta$ u regulačního diagramu pro výběrové průměry (\bar{x}).

2.1 Rozbor vlivu systematické chyby

Působí-li pouze systematická chyba měření c , pak ve skutečnosti nepracujeme s pravou náhodnou veličinou X , ale s empirickou náhodnou proměnnou X^e , pro kterou platí:

$$X^e = X + c \quad (7)$$

Systematická chyba měření c působí již ve fázi tvorby regulačního diagramu

Jestliže systematická chyba c již „kontaminovala“ hodnoty měřené veličiny, z nichž byly vypočítány střední přímka, horní regulační mez a dolní regulační mez, pak nepracujeme s jejich pravou hodnotou CL , UCL a LCL , ale s jejich empirickými hodnotami CL^e , UCL^e a LCL^e , pro které platí:

$$CL^e = CL + c, \quad (8)$$

$$UCL^e = UCL + c \quad (9)$$

$$LCL^e = LCL + c \quad (10)$$

+Vyjdeme-li ze vztahů (5) a (6), upravených pro testovací charakteristiku v regulačním diagramu pro výběrové průměry (\bar{x}), pak empirickou hodnotu rizika zbytečného signálu α^e a pravděpodobnost odhalení nepřipustné odchylky $(1-\beta)^e$ stanovíme ze vztahů:

$$\alpha^e = P(\bar{X} > UCL^e) + P(\bar{X} < LCL^e) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL + c - (\mu_0 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL + c - (\mu_0 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) \quad (11)$$

$$(1-\beta)^e = P(\bar{X} > UCL^e) + P(\bar{X} < LCL^e) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL + c - (\mu_1 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL + c - (\mu_1 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) \quad (12).$$

Jak je vidět ze vzorců (11) a (12), systematická chyba c se vyruší. Z toho plyne, že v situaci, kdy systematická chyba c ovlivnila i výpočet střední přímky a regulačních mezí, platí:

$$\alpha^e = \alpha \quad (13)$$

$$(1-\beta)^e = 1 - \beta. \quad (14)$$

Systematická chyba měření nepůsobila ve fázi tvorby regulačního diagramu

Jestliže se systematická chyba projeví až po zavedení regulačního diagramu, pracujeme s pravými regulačními mezemi UCL a LCL, ale do regulačního diagramu zaznamenáváme hodnoty testovací charakteristiky $\bar{X}^e = \bar{X} + c$. Empirickou hodnotu rizika zbytečného signálu pak vypočteme dle vztahu:

$$\alpha^e = P(\bar{X} > UCL) + P(\bar{X} < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL - (\mu_0 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - (\mu_0 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right). \quad (15)$$

a empirickou hodnotu pravděpodobnosti odhalení nepřijatelné odchylky stanovíme dle vztahu:

$$(1-\beta)^e = P(\bar{X} > UCL) + P(\bar{X} < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UC - (\mu_1 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - (\mu_1 + c)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) \quad (16)$$

Ze vztahů (15) a (16) plyne, že v tomto případě systematická chyba c ovlivní výši rizika zbytečného signálu a pravděpodobnosti odhalení nepřijatelné odchylky. Jak pro $c > 0$, tak pro $c < 0$ platí:

$$\alpha^e > \alpha \quad (17)$$

$$(1-\beta)^e > 1 - \beta. \quad (18)$$

2.2 Rozbor vlivu náhodné chyby měření

Nejvýznamnějším případem náhodné chyby je aditivní náhodná chyba, kterou si označíme V . Za předpokladu, že nepůsobí systematická chyba měření, lze empirickou proměnnou X^e popsat následovně:

$$X^e = X + V, \quad (19)$$

(předpokládá se, že X a V jsou statisticky nezávislé náhodné proměnné).

Pro pravou proměnnou X platí $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ a pro náhodnou chybu V platí $V \sim N(0, \sigma_V^2)$.

Chyba V nemá žádný vliv na úroveň procesu μ_0 . Na rozdíl od systematické chyby má náhodná chyba vliv na účinnost regulačního diagramu jak v situaci, kdy jsou touto chybou kontaminovány již regulační meze použitého regulačního diagramu, tak tehdy, když náhodná chyba začne působit až ve fázi aplikace regulačního diagramu.

Opět bude pro ilustraci použit regulační diagram pro výběrové průměry (\bar{x}). Jestliže působí náhodná chyba V , pak ve skutečnosti do regulačního diagramu vynášíme empirické hodnoty testovací charakteristiky, tj. $\bar{X}^e = \bar{X} + \bar{V}$, pro kterou platí $\bar{X}^e \sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{x}}^e)$.

Zavedeme-li vztah pro relativní rozptyl chyby měření

$$r^2 = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_0^2}, \quad (20)$$

pak $\sigma_{\bar{x}}^e$ lze vyjádřit následovně:

$$\sigma_{\bar{x}}^e = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 + \sigma_V^2}{n}} = \sigma_{\bar{x}} \sqrt{1+r^2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{1+r^2}. \quad (21)$$

Náhodná chyba působí již ve fázi tvorby regulačního diagramu

V tomto případě pracujeme s empirickými regulačními mezemi

$$UCL^e = \mu_0 + 3\sigma_{\bar{x}}^e = \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}, \quad (22)$$

$$LCL^e = \mu_0 - 3\sigma_{\bar{x}}^e = \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}, \quad (23)$$

Riziko zbytečného signálu pak stanovíme takto:

$$\alpha^e = P(\bar{X} > UCL^e) + P(\bar{X} < LCL^e) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL^e - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL^e - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right) \quad (24)$$

Platí: $\alpha^e = \alpha$.

Empirickou hodnotu pravděpodobnosti včasného odhalení nepřijatelné odchylky stanovíme dle vztahu:

$$(1-\beta)^e = P(\bar{X} > UCL^e) + P(\bar{X} < LCL^e) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL^e - \mu_1}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL^e - \mu_1}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right) \quad (25)$$

Platí, že pravděpodobnost $(1-\beta)^e < (1-\beta)$ a s rostoucím r^2 její hodnota klesá.

Náhodná chyba působí až ve fázi zavedení regulačního diagramu:

V tomto případě v regulačním diagramu pracujeme s pravými regulačními mezemi UCL a LCL:

$$UCL = \mu_0 + 3\sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

$$LCL = \mu_0 - 3\sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \quad (27)$$

Riziko zbytečného signálu pak stanovíme ze vztahu:

$$\alpha^e = P(\bar{X} > UCL) + P(\bar{X} < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right). \quad (28)$$

Platí, že $\alpha^e > \alpha$ a s rostoucím r^2 .

Pro určení pravděpodobnosti odhalení nepřijatelné odchylky použijeme v tomto případě vztah:

$$(1-\beta)^e = P(\bar{X} > UCL) + P(\bar{X} < LCL) = 1 - \Phi\left(\frac{UCL - \mu_1}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right) + \Phi\left(\frac{LCL - \mu_1}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\sqrt{1+r^2}}\right). \quad (29)$$

Hodnota $(1-\beta)^e > (1-\beta)$ a s rostoucím r^2 roste.

3. Metodika analýzy a stanovení systematické chyby (strannosti) pomocí regulačních diagramů

Výsledky kalibrace lze doplnit o statistickou analýzu dat získaných při kalibraci a umožnit tak objektivnější rozhodování o seřízení měřicího přístroje. V literatuře (Pyzdek.T., 1992) je popsána následující metodika založená na aplikaci regulačních diagramů pro individuální hodnoty a klouzavé průměry.

1. Změření sledovaného znak jakosti u etalonu nebo vybraného produktu minimálně 50x (nutnost dodržet chronologii naměřených hodnot),
 - a) jestliže jsou všechny hodnoty stejné, ale liší se od pravé hodnoty – je nutné seřízení měřicího přístroje na pravou hodnotu
 - b) v ostatních případech se pokračuje bodem 2.
2. Výpočet klouzavých průměrů ze dvou po sobě naměřených hodnot.
3. Sestrojení prosté tabulky četností hodnot klouzavých průměrů, výpočet četností, kumulativních četností a kumulativních četností v %.
4. Výpočet hodnot COF a COF_p dle vztahů:

$$COF = \frac{R_{>50} + R_{next}}{2}, \quad (30)$$

$R_{>50}$ je hodnota klouzavého rozpětí, u níž kumulativní četnost v % přesahuje 50%,

R_{next} je hodnota klouzavého rozpětí následující v tabulce četnosti po hodnotě $R_{>50}$.

$$COF_p = \frac{RC + \frac{1}{6}}{2 \cdot (n-1) + \frac{2}{3}}, \quad (31)$$

RC je součet četností klouzavých rozpětí ve zbývajících řádcích tabulky četností (počítáno od řádku pro $R_{>50}$ dále),

$n-1$ je počet hodnot klouzavých průměrů.

5. Výpočet horní (UCL) a dolní (LCL) regulační meze pro regulační diagram pro individuální hodnoty dle vztahů:

$$UCL = x + 3 \frac{COF}{\sqrt{2} \cdot CV}, \quad (32)$$

$$LCL = x - 3 \frac{COF}{\sqrt{2} \cdot CV}, \quad (33)$$

x je pravá hodnota měřené veličiny,

- CV je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení odpovídající hodnotě COF_p .
6. Výpočet střední přímky a regulačních mezí pro diagram pro klouzavé průměry.
 7. Sestrojení regulačních diagramů pro individuální hodnoty a klouzavé průměry.
 8. Analýza regulačních diagramů:
 - a) všechny hodnoty v diagramu pro individuální hodnoty leží uvnitř regulačních mezí – není třeba provádět recalibraci měřidla.
 - b) některá hodnota v diagramu pro individuální hodnoty leží mimo horní nebo dolní regulační mez – je třeba kompenzovat systematickou chybu měření.
 - c) v diagramu pro individuální hodnoty leží některé body jak mimo horní, tak mimo dolní regulační mez nebo diagram pro klouzavé průměry vykazuje nestabilitu – před recalibrací měřidla je třeba vyhledat a odstranit působení vymezené příčiny variability procesu měření.

4. Závěr

Jak bylo ukázáno v kapitole 2 tohoto příspěvku, systematické i náhodné chyby ovlivňují účinnost regulačních diagramů. Působí-li daná chyba jak ve fázi výpočtů regulačních mezí, tak ve fázi aplikace regulačního diagramu, pak se mění pouze pravděpodobnost odhalení nepřijatelné odchylky procesu, resp. riziko chybějícího signálu. Jestliže však daná chyba působí až ve fázi zavedení regulačního diagramu, mění se jak riziko zbytečného signálu, tak riziko chybějícího signálu. Proto je třeba tyto chyby minimalizovat, popř. minimalizovat jejich dopady na uvedená rizika.

Systematickou chybu lze analyzovat pomocí metodiky využívající regulačních diagramů, která je stručně popsána v kapitole 3 v tomto příspěvku.

Další typy variability (reprodukovatelnost, opakovatelnost) lze analyzovat např. známou metodou R&R, která také využívá regulačních diagramů (blíže např. (Pyzdek, T., 1992)).

5. Literatura

- KAZANUKA, T.: The effect of measurement error on the power of charts. *Journal of Quality technology*, vol. 18, no. 2, April 1986.
- MITTAG, H.J. AND RINNE, H.: *Statistical methods of quality assurance*. London: Chapman&Hall, 1993. 647 s.
- MLČOCH, I. A SLIMÁK, I.: *Řízení kvality a strojírenská metrologie*. Praha: SNTL/Alfa, 1987.
- PYZDEK, T. 1992. *Pyzdek's Guide to SPC. Applications and Special Topics (Vol. 2)*. Tuscon, Arizona: ASQC – Quality Press. Quality Publishing, Inc. ISBN 0-930011-04-X.
- TOŠENOVSKÝ, J. A NOSKIEVIČOVÁ, D.: *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Ostrava: Montanex, 2000. 362 s.

Kontakt na autora:

E-mail: darja.noskievicova@vsb.cz