

Závislost indexů C_p, C_{pk} na způsobu výpočtu směrodatné odchylky

Ing. Renata Przczková

katedra kontroly a řízení jakosti, VŠB-TU Ostrava, FMMI

Podnik, který chce uspět v dnešní konkurenci, musí neustále reagovat na měnící se požadavky trhu, usilovat o zvyšování jakosti a současně snižovat náklady. Existuje mnoho metod a nástrojů, uplatňovaných v různých etapách výrobního procesu. Jednou z důležitých oblastí managementu jakosti je měření procesů. Jeho součástí je hodnocení způsobilosti procesů, které je důležitým podkladem pro plánování a zlepšování jakosti. Způsobilostí procesu se rozumí jeho schopnost, trvale dosahovat předem stanovená kritéria kvality. Je žádoucí vyjadřovat způsobilost kvantitativně, tedy nějakým číselným ukazatelem. K jejímu hodnocení se používají indexy způsobilosti. Porovnávají předepsanou maximálně přípustnou variabilitu hodnot danou tolerančními mezemi se skutečnou variabilitou sledovaného znaku jakosti dosahovanou u statisticky zvládnutého procesu. Existuje poměrně mnoho ukazatelů pro posuzování způsobilosti procesu, ale každý z nich je použitelný pouze tehdy, jsou-li splněny určité konkrétní podmínky.

V teorii indexů způsobilosti se standardně předpokládá, že proces se nachází ve statisticky stabilním stavu, jehož data pochází z normálního rozdělení se známou střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ . V takovém případě lze použít pro výpočet C_p a C_{pk} vztahy:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad C_{pk} = \text{Min} \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\}$$

Jak bylo již řečeno pro výpočet C_p a C_{pk} je potřeba znát střední hodnotu μ , směrodatnou odchylku σ a horní a dolní toleranční mez (USL, LSL). Hodnoty směrodatné odchylky a střední hodnoty základního souboru většinou nejsou k dispozici a tak se nahrazují vhodným odhadem. (tab 1.) Pro odhad směrodatné odchylky se doporučuje využít vztahů založených na průměrné variabilitě v podskupinách, které lépe charakterizují variabilitu vyvolanou náhodnými příčinami. Tím místo indexů C_p a C_{pk} dostáváme pouze jejich odhady. Vztahy pro jejich výpočet jsou uvedeny v tab. 2

Odhad základních charakteristik

Pro výpočet odhadů lze použít několika vztahů:

Tabulka 1: Alternativní vztahy pro odhady μ a σ

Odhad μ	$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i$		
Odhad σ	$S = \left(\frac{1}{kn-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right)^{1/2}$	$\frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{(1/k) \sum_{i=1}^k R_i}{d_2}$	$\frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{(1/k) \sum_{i=1}^k S_i}{c_4}$

d_2, c_4 - koeficienty závislé na rozsahu podskupiny

k – počet podskupin

\bar{R} - průměrné variační rozpětí v podskupinách

\bar{s} - průměrná hodnota výběrových směrodatných odchylek v podskupinách

Koeficienty d_2^* , d_2 , c_4 jsou uváděny např. v (5).

Běžně se data řadí do k podskupin, s n naměřenými hodnotami (rozsah podskupiny) v každé podskupině.

Tabulka 2 : Alternativní vztahy pro odhady \hat{C}_p a \hat{C}_{pk}

\hat{C}_p	\hat{C}_{pk}
$\hat{C}_p(1) = \frac{USL - LSL}{6S}$	$\hat{C}_{pk}(1) = \text{Min} \left\{ \frac{USL - \bar{X}}{3S}; \frac{\bar{X} - LSL}{3S} \right\}$
$\hat{C}_p(2) = \frac{USL - LSL}{6 \left(\frac{\bar{R}}{d_2} \right)}$	$\hat{C}_{pk}(2) = \text{Min} \left\{ \frac{USL - \bar{X}}{3 \frac{\bar{R}}{d_2}}; \frac{\bar{X} - LSL}{3 \frac{\bar{R}}{d_2}} \right\}$
$\hat{C}_p(3) = \frac{USL - LSL}{6 \left(\frac{\bar{S}}{c_4} \right)}$	$\hat{C}_{pk}(3) = \text{Min} \left\{ \frac{USL - \bar{X}}{3 \frac{\bar{S}}{c_4}}; \frac{\bar{X} - LSL}{3 \frac{\bar{S}}{c_4}} \right\}$

Použitím různých vztahů pro výpočet odhadů směrodatné odchylky se mohou lišit i výsledné hodnoty C_p a C_{pk} . Pro ilustraci provedeme příklad výpočtu odhadů \hat{C}_p a \hat{C}_{pk} s použitím alternativních vztahů (tab 1.).

Příklad 1

Předpokládejme že, data pocházejí z normálního rozdělení s : $\mu = 38$, $\sigma = 2$, $USL = 46$, $LSL = 30$; skutečná hodnota C_{pk} je rovna 1,333

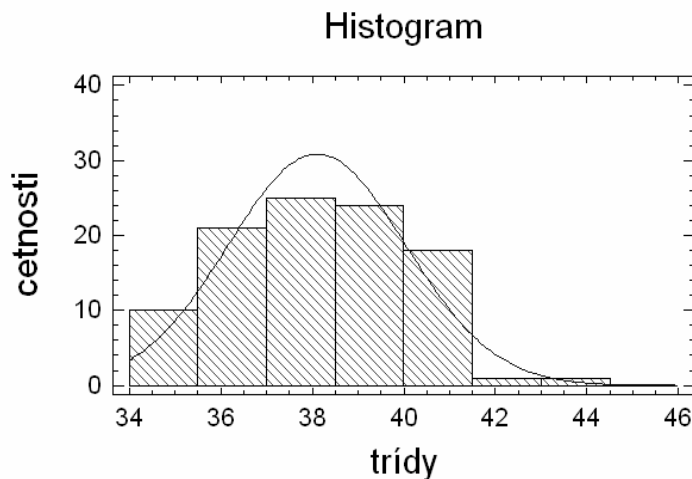
Tabulka 3: Analyzovaná data

podskupina	měření (n)					\bar{x}	R	s
	1	2	3	4	5			
1	35,7469	39,5214	37,9319	42,5595	41,1087	39,374	6,813	2,665
2	40,4102	39,8618	37,4426	38,7154	37,309	38,748	3,101	1,395
3	40,1331	39,1086	35,1965	36,3329	44,4458	39,043	9,249	3,624
4	36,5772	35,2277	38,9948	39,9565	40,75	38,301	5,522	2,326
5	37,1843	38,1434	40,8765	40,125	39,1135	39,089	3,692	1,482
6	37,7866	38,8452	35,0995	41,0391	37,541	38,062	5,94	2,156
7	35,5293	40,4347	37,7844	38,7115	34,7325	37,438	5,702	2,328
8	37,0911	38,4909	38,7554	35,7625	39,4534	37,910	3,691	1,476
9	36,9496	36,0265	37,9407	40,9018	38,9424	38,152	4,875	1,884
10	36,9645	35,2258	36,6312	38,0531	35,2116	36,417	2,842	1,214
11	40,7362	35,8506	36,6678	38,7993	35,6045	37,531	5,132	2,189
12	38,8677	35,423	38,8548	38,0185	36,7121	37,575	3,445	1,49
13	40,2648	39,8572	35,6708	40,3589	37,2523	38,681	4,688	2,11

14	38,8836	37,4018	37,2964	35,8216	36,1989	37,120	3,062	1,199
15	40,052	37,1552	37,3824	36,351	36,3514	37,458	3,701	1,523
16	39,3617	34,9085	36,0737	34,8657	35,542	36,150	4,496	1,863
17	38,4102	40,0646	37,2707	40,182	38,1237	38,810	2,911	1,271
18	36,8885	38,4639	37,6267	40,449	38,6814	38,422	3,561	1,338
19	40,1066	39,7818	38,7937	38,8771	37,7151	39,055	2,392	0,939
20	39,7182	40,9404	38,1741	35,4849	39,1216	38,688	5,455	2,052
						\bar{X} 38,101	\bar{R} 4,513	\bar{s} 1,826

Normalita byla ověřena pomocí testu chí kvadrát χ^2 , kde hodnota testového kritéria 0,1356 je větší než hodnota 0,05, proto hypotéza, že data pochází z normálního rozdělení může být přijata.

Data použita v příkladu charakterizuje následující histogram:



Obrázek 1: Histogram popisující data z příkladu

Tabulka 4: Odhady \hat{C}_p a \hat{C}_{pk}

\hat{C}_p	\hat{C}_{pk}
$\hat{C}_p(1) = \frac{46 - 30}{6 \cdot 1,932} = 1,380$	$\hat{C}_{pk}(1) = \text{Min} \left\{ \frac{46 - 38,1014}{3 \cdot 1,932}; \frac{38,1014 - 30}{3 \cdot 1,932} \right\} = 1,363$
$\hat{C}_p(2) = \frac{150 - 25}{6 \cdot 1,940} = 1,375$	$\hat{C}_{pk}(2) = \text{Min} \left\{ \frac{46 - 38,1014}{3 \cdot 1,940}; \frac{38,1014 - 30}{3 \cdot 1,940} \right\} = 1,357$
$\hat{C}_p(3) = \frac{150 - 25}{6 \cdot 1,943} = 1,372$	$\hat{C}_{pk}(3) = \text{Min} \left\{ \frac{46 - 38,1014}{3 \cdot 1,943}; \frac{38,1014 - 30}{3 \cdot 1,943} \right\} = 1,355$

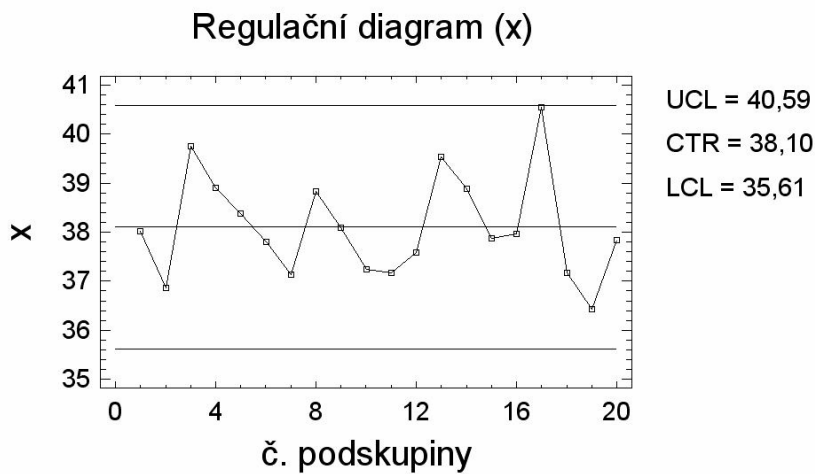
Jak ukazují tyto výsledky, odhady indexů C_p a C_{pk} závisí na zvoleném způsobu provedení jejich výpočtu.

Pro srovnání, jak se liší hodnoty indexů C_p, C_{pk} vypočítané dle vztahů (2,3) a \hat{C}_p, \hat{C}_{pk} s použitím vztahu (1), byly stanoveny rozdíly v procentech. (tab.5)

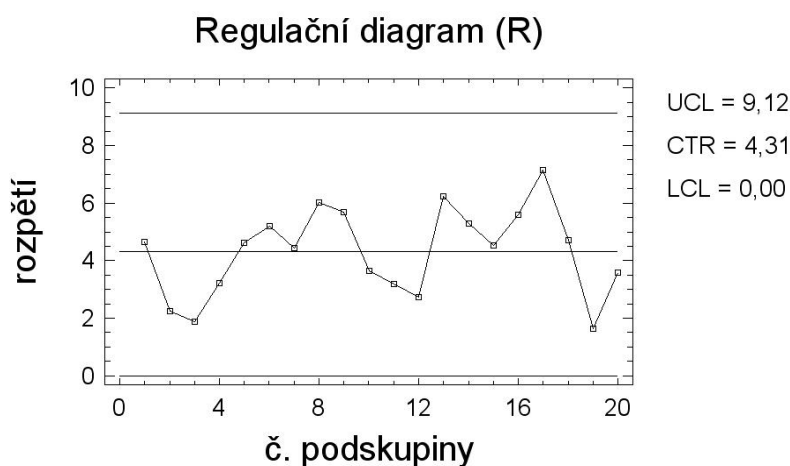
Tabulka 5: Rozdíl mezi výslednými hodnotami indexů C_p, C_{pk} stanovený v procentech:

		%			%
$\hat{C}_p(1)$	1,380	100	$\hat{C}_{pk}(1)$	1,363	100
$\hat{C}_p(2)$	1,375	99,550	$\hat{C}_{pk}(2)$	1,357	99,550
$\hat{C}_p(3)$	1,372	99,432	$\hat{C}_{pk}(3)$	1,355	99,430

Vztahy pro výpočet odhadů směrodatné odchylky ve vzorcích $\hat{C}_p(2,3)$ i pro $\hat{C}_{pk}(2,3)$ se používají při konstrukci regulačních diagramů (\bar{x}, R)



Obrázek 2: Regulační diagram (x) pro data z tab. 3



Obrázek 3 : Regulační diagram (R) pro data z tab. 3

Intervalové odhady indexů způsobilosti

Ze vztahů pro výpočet indexů způsobilosti vyplývá, že k jejich výpočtu potřebujeme teoretické charakteristiky (μ, σ) , které jsou prakticky nedostupné. Stanovit lze pouze jejich odhady, a proto vypočtené hodnoty indexů způsobilosti jsou rovněž odhady. Z toho vyplývá, že s vypočtenou hodnotou indexu způsobilosti nelze zacházet jako s konstantou, ale jako s odhadem, pro který lze stanovit konfidenční interval. Šíře konfidenčního intervalu výrazně závisí na velikosti výběru. Závislost šířky konfidenčního intervalu C_p na počtu hodnot je pro případ $C_p = 1,33$ a hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ znázorněna na obr.4. Pro případ indexu způsobilosti C_p lze například dvoustranný konfidenční interval vyjádřit vztahem:

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu}}{\nu}} \cdot \hat{C}_p \leq C_p \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, \nu}}{\nu}} \cdot \hat{C}_p$$

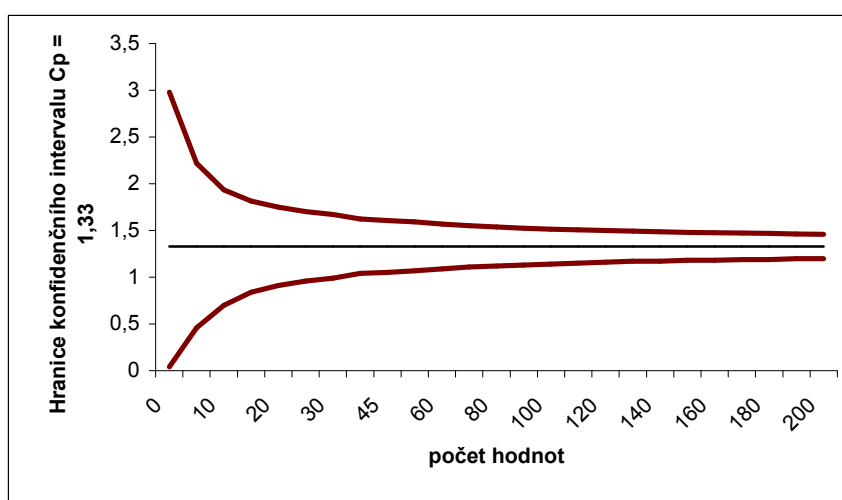
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu}$; $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, \nu}$ - kvantily rozdělní χ^2 s ν stupni volnosti

α - hladina významnosti
 ν - počet stupňů volnosti

Pro případy, kdy se směrodatná odchylka odhaduje na základě průměrných charakteristik variability v podskupinách, se počet stupňů volnosti stanovuje pomocí vztahu:

$$\nu = k \cdot (n - 1) \cdot f_c$$

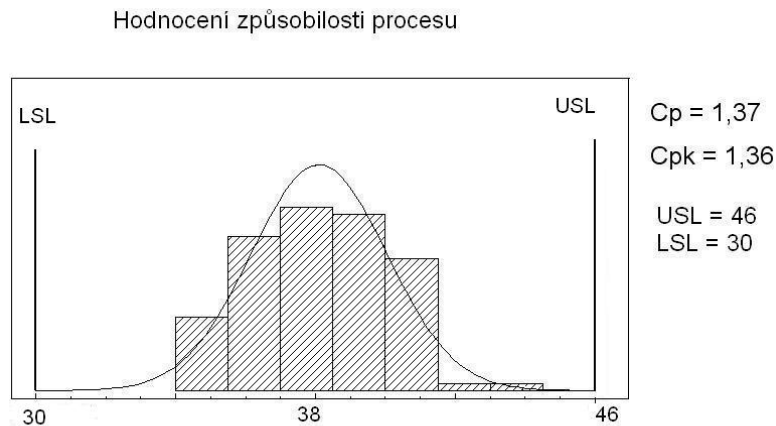
k – počet podskupin
 n – rozsah podskupiny
 f_c – korekční faktor, který závisí na rozsahu podskupiny a způsobu odhadu směrodatné odchylky



Obrázek 4: Interval spolehlivosti odhadu indexu způsobilosti $C_p = 1,33$ v závislosti na velikosti výběru ($\alpha = 0,05$)

Z grafu je patrné, že při malém počtu hodnot je interval spolehlivosti odhadu velmi široký a teprve s vyšším rozsahem výběru se zužuje.

Pro data z příkladu 1, viz. tab.3., kde bylo analyzováno 100 hodnot, konfidenční interval pro C_p při hladině významnosti $\alpha = 0,05$ leží v rozmezí $\langle 1,18238; 1,56438 \rangle$ a pro C_{pk} v rozmezí $\langle 1,15686; 1,55601 \rangle$, byl vypočten pomocí softwaru.



Obrázek 5: Grafické znázornění způsobilosti procesu

Shrnutí:

Článek je zaměřen na problematiku současných indexů způsobilosti. Upozorňuje na použití alternativních metod výpočtu výběrové směrodatné odchylky při odhadu C_p a C_{pk} . Ukazuje, že odhady indexů C_p a C_{pk} přímo závisí na zvoleném způsobu výpočtu směrodatné odchylky. Dále se článek věnuje oblasti intervalového odhadu již zmiňovaných indexů způsobilosti, a popisuje závislost šíře konfidenčního intervalu na velikosti výběru.

Použitá literatura:

1. Kaminsky, F. C., Dovich, R. A., Burke, R. J. Process capability indices: Now and in the future, *Quality Engineering* 10(3) (1998)
2. Kotz, s., Johnson, N., W.L., *Distributional and Inferential Properties of Process Capabiltiy Indices*, *J. qual. Technik.*, 24(4) (1992)
3. Gaminsky, F. c. and Davis R. D., *Statistical measures of Process Capability and Their Relationship to Nonconforming Produkt*, in proceedings of the Third Biennial International Manufacturing Research Forum (1989)
4. Montgomery, D. C., *Introduction to Statistical duality kontrol*, John Wiley and Sons, New York, 1985
5. Plura, J: *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*, Computer Press, Praha, 2001

Lektoroval:

Prof. RNDr. Josef Tošenovský, CSc.