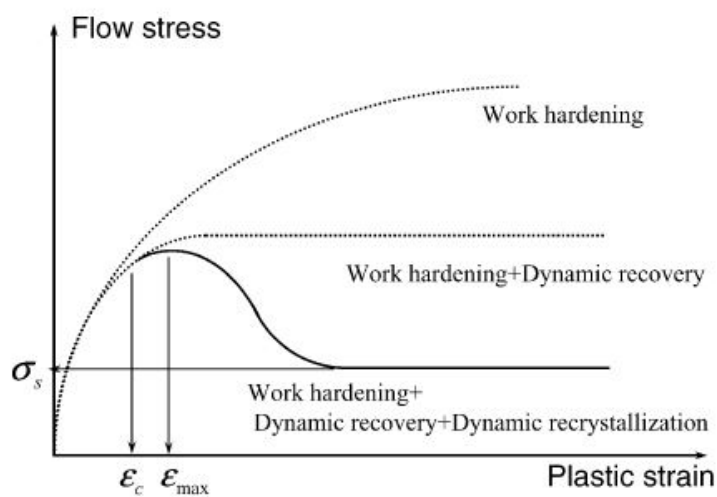


PLASTICITA MATERIÁLU

Jiří Kliber

STUDIJNÍ OPORA PŘEDMĚTU



Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
fakulta metalurgie a materiálového inženýrství
katedra tváření materiálu
Ostrava, 2016

Název : Plasticita materiálu
Autor. Jiří Kliber
Vydání: první, 2016
Počet stran: 52

Studijní materiál pro studijní program Metalurgické inženýrství (studijní obor Moderní metalurgické technologie) fakulty metalurgie a materiálového inženýrství Vysoké školy báňské – Technické university, Ostrava

Obsah

1. KRYSTALICKÁ STAVBA KOVŮ	5
2. PORUCHY MŘÍŽKY	7
3. DEFORMACE MONOKRYSTALU	13
4. DEFORMACE POLYKRYSTALU	17
5. KŘIVKA NAPĚTÍ-DEFORMACE	22
6. ANALÝZA DYNAMICKÉHO ZOTAVENÍ	27
7. DYNAMICKÁ REKRYSTALIZACE	37
8. STATICKÁ REKRYSTALIZACE	41
9. DIFUZNÍ MECHANISMUS PLASTICKÉ DEFORMACE	44
ÚKOL	48

POKYNY KE STUDIU

PLASTICITA MATERIÁLŮ

Pro předmět PLASTICITA MATERIÁLŮ 3. semestru studijního oboru magisterského studia jste obdrželi studijní balík obsahující integrované skriptum pro kombinované studium obsahující i pokyny ke studiu. Text v této podobě nezahrnuje celou problematiku plasticity.

Prerekvizity

Znalost matematiky, (znalost úvodních kapitol z předmětu Nauka o materiálu I. a předmětu Tváření kovů, které se týkají struktury materiálu a základních poruch v mřížce).

Cílem předmětu a výstupy z učení

Hlavním cílem předmětu "Plasticita materiálů" je vybavit studenty teoretickým základem a metodikou k řešení složité problematiky dějů, které provázejí plastickou deformaci. Úkolem předmětu je studentům poskytnout znalosti, které jsou nezbytné pro tvůrčí a komplexní inženýrské řešení navazujících technologií tvářecích procesů. Z důvodu požadovaných stránek textu nejsou uveřejněny všechny kapitoly podle osnovy předmětu.

Po prostudování předmětu by měl student být schopen:

Samostatně dále rozvíjet poskytnuté matematické vztahy, uplatňovat je při následném zpracovávání diplomové práce. Orientovat se v teoretické literatuře oboru. Získat dovednost a větší zručnost při řešení matematických úloh.

Pro koho je předmět určen

Předmět je zařazen do navazujícího magisterského studia programu Metalurgické inženýrství studijního oboru Moderní metalurgické technologie se zaměřením na technologie tváření a úpravy materiálu, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splní požadované prerekvizity.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:

V první řadě je nutné si celou kapitolu zhruba prohlédnout. Následně se podívat na části textu, resp. rovnice a přiřadit je k obrázkům. Poté vždy v dané části kapitoly probrat rovnice a samostatně je odvodit, případně pokračovat v odvozování. Není bezpodmínečně nutné znát detailně jednotlivé postupné kroky při odvozování rovnic, ale vstupní parametry, výsledné tvary a slovní vyjádření jednotlivých veličin je nutné. Doporučuji si obrázky samostatně nakreslit a postupně je doplňovat podle vzoru tak, že si v mnoha případech vytvoříte vlastní mnemotechnické pomůcky.

Způsob komunikace s vyučujícími:

Možnosti komunikace studentů spočívají přednostně ve využívání časového prostoru přednášek a po domluvě ve vybraných hodinách konzultací. Kontroly zadávaných programů pak na cvičeních s dalšími detailními pokyny.

e-mail : jiri kliber@vsb.cz

tel.: +420/595994463

1. KRYSTALICKÁ STAVBA KOVŮ



Členění kapitoly:

Mřížky (feritická a austenitická).

Počty atomů v mřížce a mřížkové konstanty.

Skluzové systémy.



Čas potřebný ke studiu: 90 minut



Cíl:

Pochopit krystalickou stavbu hmoty.

Vysvětlit rozdíl mezi substitučními a intersticiálními tuhými roztoky.



VÝKLAD

Tato kapitola bude, byť je první, je zcela odlišná od ostatních kapitol, ve kterých budou jak rovnice, tak obrázky podrobně vysvětleny. Tady se odkazujeme na předměty, kterými jste prošli v minulosti a i na opory, které jsou přístupny na webu FMMI VŠB-TUO. Je to opora Nauka o materiálu I, příp. Tváření kovů a také Teorie tváření.

Kovy mají krystalickou formu, nejčastěji v podobě krychlové nebo šesterečné mřížky.

Mřížka KSC – kubická stereocentrická, se také anglicky označuje BCC (body centred cubic). Počet atomů, které připadají na tuto mřížku jsou 2. Tato část bude probrána ve cvičení jako program. Z kovů mezi ně patří mezi ně Cr, W, V, Mo, Nb, Fe_a. Mřížka Fe_a, 9 atomů v mřížce se středovým atomem, mřížková konstanta $a_a = 0,3567$ nm, přibližně 357 pm. V mřížce feritické je nejhustěji obsazená rovina a skupina rovin {110} a směr nejhustěji obsazených atomů je [111]. Je to normála k oktaedrické rovině. U mřížky KSC je koordinační číslo 8, to je počet nejbližších atomů v mřížce. Na přednášce bude

ukázána také tabulka tzv. skluzových systémů. Tady pouze konstatace, že u mřížky KSC je skluzových systémů 48, byť se některé uplatňují pouze v dané teplotní oblasti.

U mřížky KPC je také anglické označení FCC (face centred cubic). Z kovů mezi ně patří Al, Cu, Ag, Au, Ni, Pb, Fe_γ s počtem 4 atomů na elementární buňku a obdobně jako u mřížky KSC bude míra zaplnění mřížky náplní cvičení. Mřížka austenitická KPC má 16 atomů v mřížce, mřížková konstanta $a_\gamma = 0,2866$ nm, přibližně 287 pm. U mřížky austenické KPC je nejhustěji obsazená rovina $\{111\}$, tj. rovina oktaedrická a se směrem v podstavě $[110]$. Koordinační číslo KPC je 12. U mřížky KPC je skluzových systémů 12.

Mřížka šesterečná – jako představitele jsou zde uvedeny Zn, Mg. Výška buňky c při mřížkové konstantě vzdálenosti atomů na podstavě je v poměru $a/c=1,63$. Mřížka šesterečná má 3 skluzové systémy.

Tuhé roztoky jsou buď substituční, kde rozdíl v poloměrech atomů legujícího prvků od prvků v matici je zhruba od 15 až 20%, atom legury zaujme místo v mřížce místo atomu matrice.

Tuhé roztoky intersticiální jsou s atomy, jejichž poloměr je velmi malý a mohou se umístit do volného místa v mřížce, např. u mřížky KPC na hraně do vzdálenosti $a/2$. Mezi prvky intersticiální patří v pořadí rostoucích poloměrů H B C N O (poloměr vodíkového atom $r_H = 50$ pm).



Shrnutí pojmů:

Krychlová a šesterečná soustava.

Typy tuhých roztoků.



Otázky:

jaké znáte typy mřížek,

nakreslete mřížku KSC a KPC,

jaký je matematický vztah mezi mřížkovou konstantou a poloměrem atomu,

jaký je teoretický počet atomů na vyplnění mřížky u obou typů,

jak znázorníte význačné roviny a směry u obou typů mřížek,

jak se stanoví počet skluzových systémů.

2. PORUCHY MŘÍŽKY



Členění kapitoly:

Vakance.

Disokace.

Vrstevné chyby.

Hranice zrn.



Čas potřebný ke studiu: 120 minut



Cíl:

Seznámit se s poruchami mřížky.

Získat názor na počet atomů a vakancí v mřížce.

Matematicky odvodit napětí a energii okolo dislokace.

Přiřadit hodnotu vrstevné chyby k strukturám.



VÝKLAD

Poruchy mřížky dělíme na:

- bodové, tedy vakance,
- čárové, to jsou dislokace a to buď hranové nebo šroubové,
- plošné, to jsou vrstevné chyby
- prostorové, to jsou hranice zrn

Vakance jsou prázdné místa v mřížce, jejich počet je určen velmi známým Arrheniovým vztahem exponenciální závislosti na teplotě. Rovnice pro počet vakancí je následující

$$N_v = N \cdot \exp\left(-\frac{U}{RT}\right)$$

U je energie pro vznik vakancí, která se udává v J/mol, N je počet atomů v mřížce, obvykle se uvádí jako počet v 1 mm³, R je plynová konstanta, $R = 8,134 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$, (místo R se také někdy udává k , je to Boltzmanova konstanta, která se v této oblasti teoreticky používá, její hodnota je $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$). Hodnota U je energie, je přibližně $Q/3$, kde pro Fe_α je aktivační energie samodifuze hodnota $Q = 180000 \text{ J/mol}$ a pro Fe_γ je $Q = 280000 \text{ J/mol}$. Pro rychlost vzniku vakancí platí

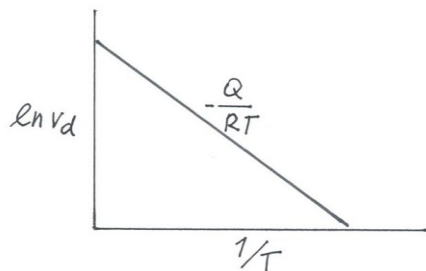
$$v_r = \frac{\delta}{t_0} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta U}{RT}\right)$$

kde hodnota $\Delta U = 2 Q/3$, $U + \Delta U = Q$. Veličina, zde označená jako δ , je meziatomová vzdálenost a t_0 je perioda kmitu atomu okolo základní polohy. Pro cvičení je připravena část, kdy si zadáváme hodnoty teploty v K a počet vakancí v jednom mm³ kubickém mřížky alfa feritické Fe_α tedy KSC, kde $N_v = 8,54 \cdot 10^{19}$. Postupně můžeme vypočítávat počet vakancí při různých teplotách.

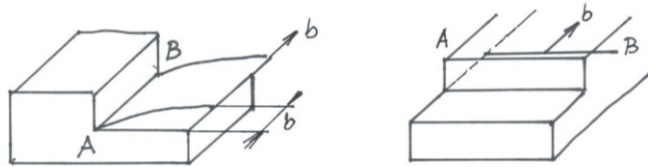
Rychlost přemísťování vakancí je pak dána následujícím vztahem je to vlastně rychlost přemísťování objemu kovu čili rychlost samodifuze a je dána vztahem

$$v_d = \frac{\delta}{t_0} \cdot \exp\left(-\frac{U+\Delta U}{RT}\right) = \frac{\delta}{t_0} \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

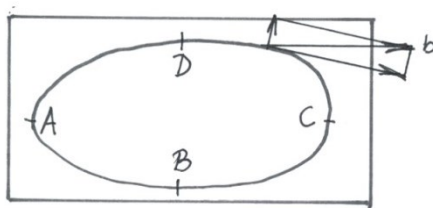
Tuto rychlost samodifuze je možné také znázornit pomocí jednoduché přímkové funkce se směrnici $-Q/R$.



Druhým typem poruchy jsou **dislokace**, tyto jsou stejně jako ostatní poruchy mřížky popsány velmi podrobně v oporách jiných autorů. Tady bych zmínil opory s názvem Nauka o materiálu I. a opora Tváření kovů (fakulta metalurgie a materiálového inženýrství, VŠB-TU Ostrava), kde jsou daleko podrobněji a detailněji tyto základní poruchy mřížky vysvětleny. Pro názornost jsou zde uvedeny jenom případy možné šroubové, resp., hranové dislokace na obrázcích.



Dislokace ovšem nejsou v materiálu pouze hranové nebo šroubové, většinou se vyskytují v podobě dislokačních smyček, které podle směru Burgesova vektoru mají tangenciální hodnotu a hodnotu kolmou, která se sčítá do hodnoty Burgesova vektoru, takže na dislokační smyčce jsou vybrané body A, B, C, D, které představují vždy buď přednostně hranový nebo šroubový úsek.



Pohyb dislokací je skluzem u hranové dislokace ve směru Burgesova vektoru ve skluzové rovině nebo šplhem, který ovšem vyžaduje přítomnost vakancí tedy spíše za vyšších teplot. Dislokace má možnost uniknout ze své skluzové roviny do jiné roviny a přesplhat a poté se znova spojit jako původně rozštěpená. Šroubové dislokace se pohybují příčným skluzem ve směru všech skluzových rovin v nichž leží Burgesův vektor. Při protínání dislokací může nastat několik variant. Když se protnou dvě dislokace hranové vzniká stupeň, který má charakter dislokace šroubové a nebrání to dalšímu pohybu. Při protnutí dvou šroubových dislokací kdy vzniká nepohyblivý skok, který může přerůst v tzv. dipól s vakancemi a účinkem napětí pak vznikají na zakotvených bodech dislokační smyčky. Dislokace jsou také neúplné, rozštěpené ale to vše je podrobněji znázorněno v jiných skriptech.

Následně vysvětlíme a odvodíme některé základní rovnice, spojené s dislokační strukturou. Začneme se základním napětím okolo dislokace, kterou si můžeme představit jako kruh, kružnici o poloměru r a s malým Burgesovým vektorem b .



Z toho pak vyplývá jednoduchý závěr pro hodnotu tečného napětí okolo dislokace

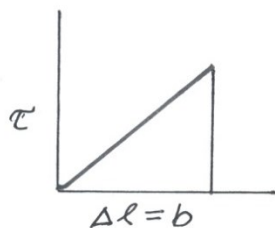
$$\frac{\tau}{G} = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{b}{\ell} = \frac{b}{2\pi r} \Rightarrow \tau = \frac{Gb}{2\pi r}$$

Připomínáme, že G je smykový modul a je ve vztahu k Youngově modulu pružnosti E

$$G = \frac{3}{8} E \doteq \frac{1}{3} E$$

Hodnota energie okolo dislokace se dá stanovit pomocí jednoduché plochy pod trojúhelníkem pomocí této rovnice

$$U = \frac{1}{2} b \tau = \frac{Gb^2}{4\pi r}$$



Celková energie je pak integrálním součtem od hodnoty poloměru r_0 do poloměru r_1 a vede ke tvaru, kde se vyskytuje závislost logaritmická vycházející z integrace dr/r

$$\Sigma U = \int_{r_0}^{r_1} U \cdot dr = \int_{r_0}^{r_1} \frac{Gb^2}{4\pi r} dr = \frac{Gb^2}{4\pi} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}$$

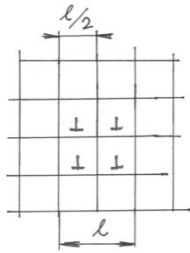
Při zjednodušení, kdy poloměr r_1 je 100 až 500 násobně větší než poloměr r_0 můžeme hodnotu logaritmu tohoto poloměru r_1/r_0 ustanovit jako 2π

$$r_1 \doteq 500 r_0 \Rightarrow \ln \frac{r_1}{r_0} \doteq 2\pi$$

a potom výsledná hodnota celkové energie má jednoduchý tvar

$$\Sigma U \doteq \frac{Gb^2}{2}$$

Hustotu dislokací si můžeme představit jako počet dislokací umístěný v mřížce o délce l , hustota je potom stanovena jednoduchým vztahem, kde ve zlomku je vlastně čtverec okolo daných dislokací



a z toho pak vyplývá, že napětí τ je dáno hodnotou podle rovnice

$$\rho = \frac{1}{l^2} \Rightarrow l^2 = \frac{1}{\rho} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \rho^{-0,5}$$

$$\tau = \frac{Gb}{l} = Gb\sqrt{\rho}$$

Hustota dislokací ρ se udává nejčastěji v cm/cm^3 , tedy výsledně jsou cm^{-2} , pro čisté kovy (panenské, nevyžíhané) se hustota dislokací pohybuje řádově okolo 10^6 až 10^8 , pro kovy zpevněné tvářením roste hustota dislokací k hodnotám 10^{12} .

Při protínání dislokací potřebujeme překonat vzdálenost. K tomu je potřebná síla

$$F = \tau b$$

Máme-li tedy udělat pohyb o vzdálenost b , tak velikost potřebné energie je

$$\tau b \lambda = \tau b \ell_w = V \tau$$

Tato hodnota je pak také vyjádřena jako energie pro překonání zakotvených dislokací lesa (co je to hustota dislokací lesa?, vysvětlení bude u kapitoly Deformace monokrystalu). Do rovnice vstupuje také aktivační objem V

$$U = U_0 - V \tau = \frac{Gb^3}{2} - \tau b^2 \ell_w$$

Při teplotě absolutní 0 je pak možno použít rovnítko mezi dvěma hodnotami energie z čehož pak vyplývá závěr v podobě hodnoty napětí τ , které je limitováno hustotou dislokací lesa

$$T = 0 \text{ K} \Rightarrow \frac{Gb^3}{2} = \tau b^2 \ell_w$$

$$\tau = \frac{Gb}{2 \ell_w} = \frac{1}{2} Gb \sqrt{\rho_w} = \alpha Gb \sqrt{\rho_w}$$

Třetím typem poruchy jsou **vrstevné chyby**. Jsou to poruchy v uspořádání atomových rovin, kde postupně chybí nebo nadbývá některá z rovin jako na příklad ABCACABC nebo ABCABBCABC. Čím nižší je energie vrstevné chyby tím je větší šířka vrstevné chyby. Energie vrstevné chyby γ_{vch} se udává mJ/m^2 . U feritických struktur je řádově okolo 100 mJ/m^2 a výše a u struktur austenitických je nízká pod 70 a u některých typu materiálů např. velmi známého nerezového materiálu 18CrNi je hodnota cca 13, také hodnoty u oceli TRIP nebo TWIP jsou velmi nízké, okolo 20 mJ/m^2 .

Čtvrtou poruchou mřížky jsou prostorové **hranice zrn**.



Shrnutí pojmů:

Poruchy mřížky.



Otázky:

jaké typy poruchy mřížek znáte,
vysvětlíte různé velikosti energií v rovnicích pro vakance,
je rozdíl mezi použitím konstant R a k ,
odvodíte základní rovnici pro napětí okolo dislokace,
jaká je celková energie dislokace,
v jakých jednotkách se uvádí hustota dislokace a co je to matematicky,
o čem vypovídá velikost vrstevné chyby,
co je to prostorová porucha.

3. DEFORMACE MONOKRYSTALU



Členění kapitoly:

Graf křivky napětí-deformace u monokrystalu.

Stanovení efektivního napětí.



Čas potřebný ke studiu: 90 minut



Cíl:

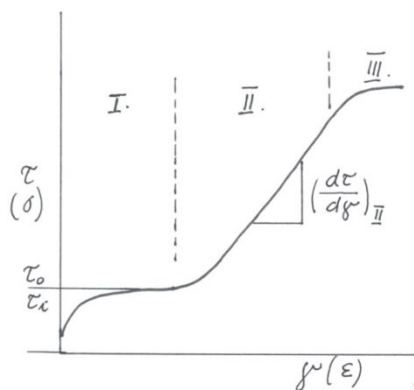
Pochopit velikosti napětí a hustoty dislokací.

Provést nástin výpočtu napětí.



VÝKLAD

Základní náhled představuje



obrázek, kde zpevňování je zde představeno pomocí růstu smykového napětí τ vůči smykové deformaci γ nebo také napětí σ vůči deformaci ε a je ho možné rozdělit do tří oblastí I., II., III.

Oblast I. Zde je vnitřní napětí určeno jako

$$\tau_i = \tau_o = \text{konst.}$$

Je to oblast velmi snadného skluzu, růst dislokací je velmi nízký a pokud se pohybují tak se neprotínají. Pak se sice začíná volná dráha zkracovat, ale protože v monokrystalu nejsou hranice zrna tak se mohou snadno pohybovat. Počet dislokací zásadně nenarůstá a hodnota napětí τ se nezvyšuje.

V **oblasti II** je směrnice nárůstu určena přibližnou hodnotou, která je stanovena modulem pružnosti ve smyku, který je přibližně roven 1/3 hodnoty Youngův modulu pružnosti, přesně 3/8 Youngova modulu pružnosti.

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma} = \frac{G}{300}$$

Dochází v této oblasti II k protínání dislokací, zkracování volné dráhy, zpevňování. To zpevňování je více méně lineární a směrnice toho zpevňování je podle literárních údajů $G/300$. Je to vlastně součinitel zpevnění a je způsoben dislokacemi lesa, zakotvenými dislokačními sítěmi, kde

$$\tau_{II} = \tau_i + \tau_{ef}$$

τ_{ef} je napětí v té druhé oblasti a jak bude později ukázáno, bude to hodnota, jejíž velikost budeme poměrně složitě odvozovat.

Oblast III. je pak funkcí energie vrstevné chyby, uplatňují se i jiné plošné skluzu a z hlediska monokrystalu už nás to nějak zvlášť nezajímá

$$\tau_{III} = f\left(\frac{1}{\rho_{rch}}\right)$$

Vrátíme se k napětí τ_{II} a následná matematická analýza se pokusí tuto hodnotu stanovit. Abychom mohli tuto analýzu začít, musíme si definovat vstupní veličiny a to postupně v tomto řádku

$$U_0 = \frac{Gb^3}{2} ; \quad \tau_i = \alpha Gb\sqrt{\rho} ; \quad V = b^2 \ell_w ; \quad \frac{1}{\ell_w^2} = \sqrt{\rho_w}$$

a to hodnotu energie okolo dislokace U_0 při pohybu, vnitřního napětí τ_i stanoveného jako závislost odmocniny hustoty dislokací, tzv. aktivační objem V , který je dán součinem b^2 a vzdálenosti vrstevné chyby přepočtené na hustotu dislokací

zakotvených, tedy dislokací lesa. Výpočet probíhá ve smyslu stanovení efektivní hodnoty τ_{ef} , kde se ve vzorci vyskytuje to námi hledané τ_{ef} , a následně výsledné hodnoty τ_{II}

$$\begin{aligned}
 U_{ef} &= U_0 - V\tau_{ef} = U_0 - V(\tau_{II} - \tau_i) \\
 \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_0 \cdot \exp\left(-\frac{U_{ef}}{kT}\right) \\
 \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} &= \left(-\frac{U_0 - V(\tau_{II} - \tau_i)}{kT}\right) \\
 kT \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} &= -U_0 + V\tau_{II} - V\tau_i \\
 \tau_i + \frac{1}{V} &= \left(kT \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} + U_0\right) = \tau_{II} \\
 \tau_{II} &= \frac{Gb}{2\pi} \sqrt{\rho} + \frac{1}{b^2 \ell_w} \left(\frac{Gb^3}{2} - kT \ln \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}}\right) \\
 \tau_{II} &= \frac{Gb}{2\pi} \sqrt{\rho} + \frac{Gb}{2\pi} \sqrt{\rho_w} (\dots \alpha \dots) \\
 \tau_{II} &= \frac{Gb}{2\pi} \left(\sqrt{\rho} + \alpha \sqrt{\rho_w}\right)
 \end{aligned}$$

Do rovnice vstupuje také závislost změny rychlosti deformace s teplotou kde ve jmenovateli může být v praktické aplikaci použita hodnota plynové konstanty R , což je 8,314 J/(mol.K). Tady do toho vstupuje hodnota Boltzmanovy konstanty k .

Úpravou rovnice pomocí logaritmování se dostáváme postupně k možnosti vyjádření τ_{II} a následným nahrazením dříve představených rovnic pak v řádku 6, resp. 7, kde hodnotou α pak vyjadřujeme tu složitou závorku. Výsledná rovnice je v posledním řádku. Je vlastně součtem dvou částí. Ta první část vyjádřená součinem před závorkou a první hodnotou v závorce je tzv. netermická vnitřní složka. Hodnota druhá, tzv. termická, závisí na velikosti dislokací lesa. Tento vztah bychom mohli dále matematicky rozvádět, pro bližší přístup jsou uvedeny přibližné hodnoty Burgesova vektoru a vzdálenosti mezi zakotvenými dislokacemi, z nichž je možné dále počítat a dojít ke vztahu pro konkrétní hodnotu vnitřního napětí τ_{ef}

$$b \doteq 3 \cdot 10^{-7} \text{ mm} = 0,3 \text{ nm} \quad \ell = 50b$$



Shrnutí pojmů:

Průběh napětí u monokrystalu.

Napětí v jednotlivých oblastech.

Efektivní napětí.

Termická a atermická složka.



Otázky:

nakreslete graf napětí-deformace u monokrystalu,

vysvětlete různé oblasti grafu,

co jsou to za moduly E a G ,

jaká je vstupní rovnice pro následný výpočet napětí,

co jsou to termická a atermická složka napětí.



Prvá odměna a odpočinek

Nelze přesně stanovit, za jak dlouho jste se dostali k tomuto místu, ale jistě jste již vyčerpání neustále se opakujícími rovnicemi. Nelze se je učit nazpaměť. Je to prostě docela jednoduchá matematika, stačí si uvědomit, z čeho vycházíme a k čemu chceme dospět. Přesto si myslím, že až tady jste nemohli dojít v jednom záťahu, jistě jste si dělali i přestávky dříve, ale tady si skutečně déle odpočiňte. Každý student je individualita, takže neexistuje obecný návod jak se takový předmět učit; doporučuji si samostatně rovnice vždy po prostudování dílčí kapitoly napsat.

4. DEFORMACE POLYKRystalu

Členění kapitoly:



Celkové napětí polykrystalu.

Přírůstky napětí.



Čas potřebný ke studiu: 105 minut



Cíl:

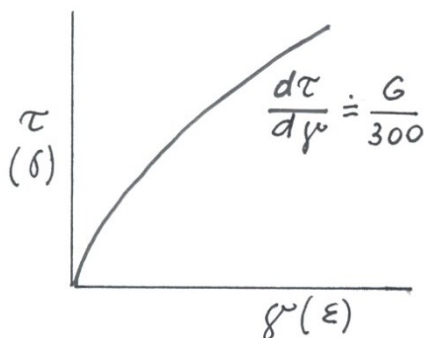
Definovat postupně přírůstky napětí u polykrystalu.

Vysvětlit vliv velikosti zrna, legujícího prvku a precipitátu.



VÝKLAD

Dislokační dráhy v polykrystalu jsou kratší, dojde k protínání těchto dislokací a není zde oblast snadného skluzu. Celková hodnota tečného napětí τ nebo také napětí σ (resp. tedy deformačního odporu) je složena z pěti, případně více přírůstků. Základní obrázek je jednoduchý, křivka vykazuje pouze zpevnění, představuje to jako deformaci „za studena“.



$$\tau_{\Sigma} = \tau_i + \Delta\tau_{\rho} + \Delta\tau_{gb} + \Delta\tau_c + \Delta\tau_p$$

Na začátku jsou to dvě vstupní veličiny, odvozené v kapitole Deformace monokrystalu, v rovnici jsou tedy:

- první člen jako **napětí vnitřní**,
- druhý člen – **přírůstek**, je **vzájemným působením dislokací lesa**,
- třetí je přírůstek způsobený deformačním zpevněním pomocí **hranice zrn**,
- čtvrtá složka je působení **legujících prvků** v tuhém roztoku
- a poslední přírůstek je způsoben existencí **precipitátů**.

Prvé dvě hodnoty byly odvozeny v kapitole o deformaci monokrystalu

$$\tau_i + \Delta\tau_{\rho} = \tau_0 + \Delta\tau_{\rho} = \frac{Gb}{2\pi} \sqrt{\rho} + \frac{Gb}{2\pi} \sqrt{\rho_w} \propto$$

Přejdeme k vlivu **hranic zrn**. Je to klasický Hall-Petchův vztah, který vychází z toho, že dislokace se hromadí před hranicemi, to je pro ně překážka. Další deformace vyžaduje zvýšení hustoty dislokací, v sousedním zrně vzniká napětí, v jisté vzdálenosti x od hrany dislokace vznikají Frank-Readovy zdroje a dochází k dalšímu a dalšímu skluzu.

$$\Delta\tau_{gb} = k \cdot d^{-0,5}$$

také ve tvaru

$$\sigma_K = \sigma_y = \sigma_i + \Delta\sigma_K = \sigma_i + k \cdot d^{-0,5}$$

Potvrzení této rovnice vychází z následujícího rozboru

Podíváme-li se na stupeň deformace ε které je rovno součinu tří veličin

$$\varepsilon = b s \rho \quad s = c d \quad c = 1$$

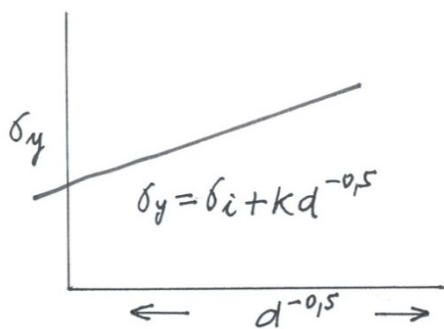
$$\frac{\varepsilon}{b} = c d \rho \Rightarrow \rho = \frac{\varepsilon}{b d} \Rightarrow \sqrt{\rho} = \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{-0,5} \cdot d^{-0,5}$$

$$\Delta\sigma_K = \alpha G b \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{-0,5} \cdot d^{-0,5} = k \cdot d^{-0,5}$$

Dráha dislokace s je rovna uvedenému součinu. Z tohoto vstupního vzorce je možné odvodit závislost pro hustotu dislokací podle další rovnice a dojít k přírůstku

zpevnění, přírůstku deformačního odporu, který je vyjádřen konstantou k před velikostí zrna. V tomto případě má exponent u velikosti zrna d hodnotu $-0,5$. Tento postup je možné považovat za odvození vlivu hranic zrn na zpevnění materiálu.

Na dolním obrázku je grafická závislost hodnoty napětí deformačního odporu na velikosti zrna na exponent $-0,5$, kde $d^{-0,5}$ je úsek na ose x a směrnice k představuje v dané rovnici přírůstek se zmenšující se velikostí zrna a rovnice je přímková.

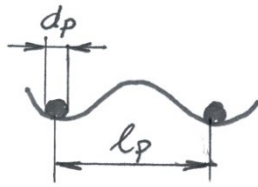


Přírůstek legujícími prvky, kde v tomto případě za legující prvky považujeme prvky substituční, nemá podstatný vliv na směrnici zpevnění na vstupním obrázku této kapitoly v podobě $\frac{G}{300}$. Legující prvek má většinou nižší energii vrstevné chyby γ_{vch} . Je tedy potřebná větší energie při deformaci a závisí to na zejména na rozdílu atomových poloměrů, tzn. na zvětšení distorze mřížky.

$$\Delta \tau_c = G \cdot \delta^n \cdot c \quad \delta = \frac{r_0 - r_a}{r_a}$$

Dislokace běží a narazí na substituční prvek a zvyšuje tento přírůstek napětí. Vznikne-li tedy vzájemné působení legurou a běžící dislokací, vytvoří se napěťové pole, napěťový val, s určitou délkou a amplitudou a ten závisí na skutečném rozdílu poloměru atomů v základní matrice v tomto případě řekněme železa, které můžeme označit v rovnici r_a a atomu legujícího prvku r_0 . V rovnici je c koncentrace legujícího prvku. Podle výše uvedené rovnice je pak přírůstek funkcí součinu těchto tří veličin, kde hodnota n je nejčastěji uváděna jako $4/3$.

Situace s **precipitáty** a jejich vlivem na zpevnění materiálu se dá rozdělit do dvou samostatných částí, kde poměr vlivu se stanovuje vzájemným poměrem velikosti precipitátů a jejich vzdálenosti.



$$\Delta\tau_p < \begin{cases} \Delta\tau_{pc} \\ \Delta\tau_t \end{cases}$$

První přírůstek nazývaný kros čili okolo nebo také pružně, předpokládá poměrně malé velikosti precipitátů daleko od sebe, kde podle rovnic lze stanovit hodnotu přírůstku

$$r_{min} = \frac{l_p - d_p}{2}$$

$$\Delta\tau_{pc} = \frac{Gb}{2\pi r_{min}} = \frac{Gb}{l_p - d_p} \dots \frac{G_H b}{l_p - d_p} \quad d_p \rightarrow 0$$

$$\Delta\tau_{pc} \doteq \frac{Gb}{l_p}$$

Při průměru precipitátů se blížícím 0, pak výsledná rovnice má tvar jako posledně uvedená.

Složitější je situace v případě, kdy precipitáty jsou velké a blízko u sebe, poté nastává druhý případ, tzv. pronik přes precipitáty nebo trans a okolo precipitátu se musí vytvořit jakási smyčka. Ten přírůstek je jednoduše zapsán další rovnicí

$$\Delta\tau_{pt} = \frac{Gb}{d_p} = \frac{G_H b}{d_p}$$

Pouze upozorňuji, že v tomto případě je modul smyku G modulem smyku matrice a ne precipitátu. Když se pak podíváme detailněji na příklad, který si můžeme spočítat podle uvedených modelových konstant pro modul pružnosti ve smyku G_m ; dále pro předpokládané rozměry a vzdálenosti jako l_p - vzdálenost mezi precipitáty; Burgersova vektoru b

$$\begin{aligned} G_H &= 70\,000 \text{ MPa} \\ l_p &= 10 d_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 3 \cdot 10^{-7} \text{ mm} \\ l_p &= 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \end{aligned}$$

vyplývá z toho po výpočtech, že kritická velikost precipitátů řádově do 10 nm, je charakterizovaná jako nekoherentní částice, zatímco velikosti řádově okolo 100 nm jsou tzv. koherentní částice. Jestliže se nyní vrátíme k rovnici Hall-Petch tak můžeme zpracovat vzájemné působení hranice zrn a precipitátů. Jestliže v rovnici Hall-Petch je k rovno či blízko 0, tak tuhý roztok má veliké nekoherentní částice a částice jsou jistě větší než 15-20 nm. Jestliže se k rovná či blíží 1, tak tuhý roztok má velmi malé nekoherentní částice. V tomto případě předpokládejme menší než 5 -10 nm. Ostatní pohyb k od 0 do 1 říká, že ve struktuře jsou oba typy částic a účastní se oba podle velikosti hodnoty k .



Shrnutí pojmů:

Pochopíte, jaká je součtová rovnice pro zpevňování materiálu při tváření.

Budete umět vysvětlit obsah dvou základních vnitřních hodnot typických pro daný materiál.

Uvědomíte si, jak působí velikost zrna na zpevňování.

Pochopíte vliv poměru velikostí atomů při legování na přírůstek napětí.

Objasníte si vliv precipitátů.



Otázky:

popis a vysvětlení křivky napětí- deformace u polykrystalu,

matematická závislost na hustotě deformací (spojit s odvozováním pro monokrystal),

jak lze odvodit exponent -0,5 u vlivu velikosti zrna a jaké je grafické zobrazení,

jak se projevuje vliv různých atomových poloměrů při legování,

vysvětlíte vliv velikosti a vzdálenosti precipitátů na výsledné rovnice přírůstků.

5. KŘIVKA NAPĚTÍ-DEFORMACE



Členění kapitoly:

Tvary křivek napětí-deformace.

Matematický zápis.

Stanovení exponentu zpevnění.

Určení konstant v rovnicích.



Čas potřebný ke studiu: 105 minut



Cíl:

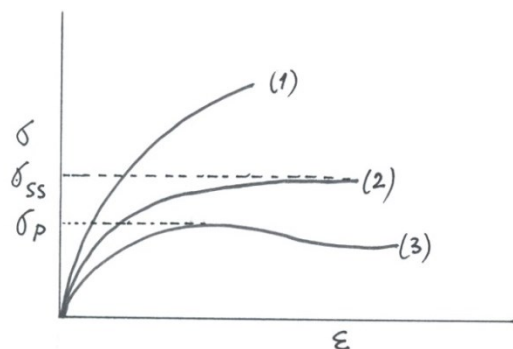
Zobrazit základní rovnice křivky se zpevněním.

Vysvětlit fyzikální význam koeficientu zpevnění.



VÝKLAD

Základní obrázek představuje modelové teoretické možnosti růstu deformačního odporu, tedy napětí na rostoucí deformaci. Prakticky vynecháváme deformaci pružnou, kde platí Hookův zákon a dostáváme se ke křivce označené jako 1, která po ukončení deformace pružné probíhá za účasti zvyšování hustoty dislokací, nastávají překážky v materiálu a pohybu dislokací, zvyšující se deformace vyžaduje a vyvolává vyšší deformační odpor.



Křivka 2 je tepelně aktivovaný děj, je to jednak zvyšování hustoty dislokací, ale také opačný děj, tedy vzájemná anihilace, dochází k rovnováze mezi vznikem a anihilací dislokací a po jisté hodnotě velikosti deformace dochází k tzv. ustálenému plastickému toku, kde velikost napětí je označována jako σ_{ss} . (Při vysoké energii vrstevné chyby např. u hliníku, tzn. při nízké disorientaci na hranicích zrn, jsou hodnoty 100 až 150 mJ/ m². Tato feritická struktura je spíše náchylná k tomuto průběhu, kterému také říkáme dynamické uzdravení).

Křivka 3 s názvem dynamická rekrytalizace je spíše typická pro slitiny s nízkou energií vrstevné chyby, to je pro austenitickou strukturu, po dosažení jisté hodnoty kritické deformace, která je představováno píkovým napětím σ_p dochází k dynamické rekrytalizaci, vzniku zárodků nových zrn v silně deformované struktuře, také tuto strukturu také nazýváme deformační texturou, ke snižování hustoty dislokací, dokonce k poklesu deformačního napětí, následně ale jejich postupnému růstu, vyplňování deformovaného zrna, nastává rovnováha a po jisté neustále probíhající deformaci přecházíme opět do ustáleného plastického toku.

Pro matematický popis křivky 1 byly představeny některé rovnice, které jsou uvedeny níže

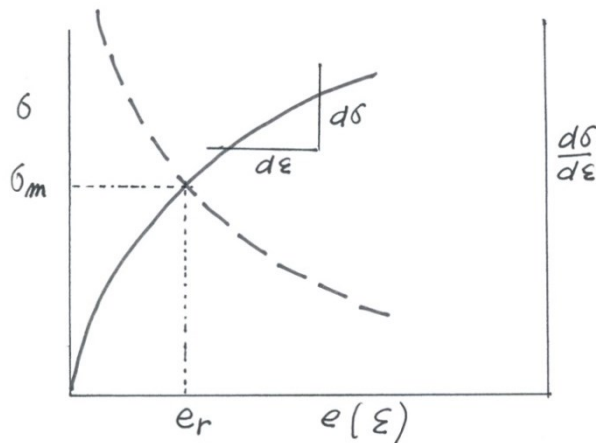
$$\sigma = k_H \cdot e^{n_H} \quad \sigma = \sigma_y + k_L \cdot e^{n_L} \quad \sigma = k_s (B_s + e)^{n_s} \quad \sigma = k_R (B_r + e)^{n_R} - C_R$$

Postupně zleva doprava je uvedena rovnice podle Hollomona, druhá podle Ludvika, třetí podle Swifta a čtvrtá podle Raisnera. Vždy napětí, které se v praxi uvádí v MPa, je označeno jako σ , případně má u sebe ještě index, e je skutečná (logaritmická) deformace, někdy se také počítá s poměrnou deformací ε .

Odchyly v jednotlivých rovnicích spočívají v tom, že při praktickém zkoušení můžeme velmi obtížně skutečně vycházet z bodu nulového napětí a deformace rovné 0.

Většinou se začátek pohybuje výše nebo níže, vpravo nebo vlevo na obou osách. Z toho se pak rekrutují následné rovnice.

Podle následujícího obrázku, kde si přidáme druhou svislou osu vpravo, jak je znázorněno, průběh nové veličiny $\frac{d\sigma}{de}$ je znázorněn přerušovanou čarou.



Při matematické analýze u tohoto grafu vycházíme ze základní Hollomonovy rovnice, ze které postupně vypočteme hodnotu

$$\sigma = k \cdot e^n \Rightarrow k = \sigma \cdot e^{-n}$$

$$d\sigma = k \cdot n \cdot e^{n-1} de \quad \frac{d\sigma}{de} = k \cdot n \cdot e^{n-1} = \sigma \cdot e^{-n} \cdot n \cdot e^{n-1} = \frac{n \cdot \sigma}{e}$$

$$e = e_r \Rightarrow \frac{d\sigma}{de} = \frac{d\sigma}{de_r} = \sigma_m \quad \frac{n \cdot \sigma}{e} = \sigma_m$$

rovnici derivujeme a pokud předpokládáme, že maximální hodnota σ_m je pro kritickou deformaci e_r , vychází z analýzy stav, který je znázorněn konečnou rovnicí

$$n = e_r$$

Tato hodnota vypovídá o plasticitě materiálu daleko více než některé jiné veličiny. Je zřejmé, že pokud je hodnota exponentu n v Hollomonově rovnici nízká, také hodnota kritické deformace pro dosažení maximálního napětí je nízká a naopak. Z toho se vyplývá jednoduchý názor na jakékoli prakticky získané rovnice. Jako příklad si uveďme rovnici pro Cu, která ve vyžíhaném stavu, tzn. s velkou zásobou plasticity, může hodnota exponentu n dosáhnout velikosti větší než 0,5, zatímco tatáž měď, která je silně deformovaná za studena, může mít exponent zpevnění n menší než 0,1.

Následné určení **konstanty** k v Hollomonově rovnici vychází postupně ze dvou rovnic

$$\sigma_m = \frac{F_{max}}{S_0} = R_m$$

a pro stanovení skutečné deformace

$$\varepsilon = \ln \frac{S_0}{S} \Rightarrow S_0 = \exp(\varepsilon) \cdot S^{-1}$$

Odvození není komplikované a vede k rovnici pro matematické vyjádření konstanty k

$$\sigma = k \cdot e^n \quad \sigma_m = k \cdot e_r^{e_r} \quad \sigma_m = R_m \cdot \exp(\varepsilon)$$

$$R_m \cdot \exp(\varepsilon) = k \cdot e_r^{e_r} \Rightarrow k = \frac{R_m \cdot \exp(\varepsilon)}{e_r^{e_r}}$$

Tuto kapitolu uzavřeme stanovením **práce do meze stability** W , kde je nutné integrovat křivku napětí-deformace,

$$W = \int_0^{e_r} \sigma \, d\varepsilon = \int_0^{e_r} k \cdot e^n \, d\varepsilon$$

postupně ji matematicky upravovat

$$W = \frac{k \cdot e^{n+1}}{n+1} = \frac{R_m \cdot \exp(n)}{n^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{n+1}$$

$$W = \frac{R_m \cdot \exp(n) \cdot n}{n+1} \quad n \ll 1 \Rightarrow \exp(n) \doteq n+1$$

$$W = R_m \cdot n$$

a při přiblížení n je menší nebo daleko menší než 1 se ukazuje, že pokud je n do 0,2 tak můžeme $\exp(n) = n + 1$ nahradit a pak je výsledek velmi jednoduchý v podobě součinu meze pevnosti a koeficientu zpevnění.

Tyto rovnice vycházejí ze skutečné fyzikální podstaty, jejich konstanty mají jistý smysl a číselné hodnoty vypovídají o vlastnostech materiálů. Je nutné podotknout, že ne vždy dokážeme těmito rovnicemi popsat složitější tvary křivky napětí-deformace.

Používají se proto polynomy x -tého řádu, které při správné matematické aplikaci popíší křivku přesně a mají také tu výhodu, že při současném používání počítačových programů, které simulují průběhy napětí - deformace, deformačních rychlostí, ... pomocí metody konečných prvků se mohou poměrně jednoduše zařadit do softwaru, který popisuje zpevnění a dokonce uzdravování materiálu v průběhu zvyšující se deformace. Jejich nevýhodou je to, že z konstant, které takto získáme, nejsme schopni na první pohled ani jinou metodou se dobrat fyzikálního popisu stavu materiálu.

$$\sigma = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$



Shrnutí pojmů:

Různé tvary křivek napětí-deformace.

Základní typy matematických rovnic.

Vztah mezi deformací a koeficientem zpevnění.

Konstanta k a její stanovení.

Práce do meze stability W .



Otázky:

vysvětlíte fyzikální děje v materiálu při zatěžování,

napište některé rovnice pro popis křivky se zpevněním,

logaritmujte některou rovnici a určete směrnici,

odvoďte vztah mezi kritickou deformací a koeficientem zpevnění,

vypočtěte konstantu k v Hollomonově rovnici,

stanovte práci do meze stability W ,

shrňte získané poznatky a proveďte stručný výklad o zpevňování materiálu bez uzdravování při probíhající deformaci.

6. ANALÝZA DYNAMICKÉHO ZOTAVENÍ



Členění kapitoly:

Seznámení se s matematickými analýzami dynamického zotavení.
Stanovení závislosti napětí na termomechanických parametrech.



Čas potřebný ke studiu: 150 minut



Cíl:

Objasnit rovnice v základní analýze podle Sellarse.
Dojít odvozováním k $\sin h$ vztahu.
Podrobně popsat postup zjišťování aktivační energie.



VÝKLAD

Prvou analýzu, kterou provedeme, bude analýza pro dynamické zotavení, tj. pro křivku určenou jako 2 v kapitole 5. Křivka napětí-deformace, kdy po dosažení kritické hodnoty e_r nebo e_p dostáváme napětí σ_p . Tuto analýzu provedl Sellars, matematicky čistě pro feritickou strukturu Fe_α , pro teplotu 500 – 800 °C, ale později ji dokážeme aplikovat pro jiné teplotní oblasti. Platí tedy převážně pro materiály s feritickou strukturou. Jak se nakonec ukáže, používáme výslednou rovnici i pro rekrytalizaci. Musíme vycházet ze dvou základních rovnic. Rovnice pro zpevňování, která je udávána vlevo a rovnice pro dynamické odpevňování, tedy uzdravování, v tomto případě zotavování, která je udána vpravo.

$$\sigma = k \cdot e^n$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \cdot \sigma^m / de$$

Postupnou úpravou těchto rovnic se snahou najít přírůstek $d\sigma$ pro oba děje, docházíme po řadě matematických úprav k rovnici, která je vyjádřena vztahem

$$\ln \sigma = \ln k + n \cdot \ln e \quad / \quad \frac{1}{n} \quad d\sigma \cdot \frac{de}{dt} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \cdot \sigma^m de$$

$$\frac{1}{n} \ln \sigma = \frac{1}{n} \ln k + \ln e \quad d\sigma \cdot \dot{e} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \cdot \sigma^m de$$

Její úpravu můžeme na přednáškách částečně ukázat, zejména úprava levé části je dobře matematicky propracovaná, vede k integrálu levé strany, použije se metoda per partes a dostaneme hodnotu σ , kterou pak porovnáme s integrálem pravé strany. Po poměrně následně složitých matematických úpravách, které už nejsou součástí této studijní opory, máme výslednou rovnici, v které se na levé straně vyskytuje rychlost deformace, ať už vyjádřena jako rychlost smykové deformace nebo rychlost poměrné deformace a na pravé straně je pak kromě konstanty A a exponenciálního vztahu na hodnotě aktivační energie Q napětí σ_{ss}^k

$$\begin{aligned} \sigma^{\frac{1}{n}} &= k^{\frac{1}{n}} \cdot e \\ \frac{1}{n} \sigma^{\frac{1}{n}-1} d\sigma &= k^{\frac{1}{n}} \cdot de \\ d\sigma &= n \cdot k^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma^{1-\frac{1}{n}} de \end{aligned} \quad \begin{aligned} d\sigma &= \frac{A \cdot \sigma^m de}{\dot{e} \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)} \\ d\sigma &= \frac{A}{Z} \sigma^m de \end{aligned}$$

$$d\sigma = n \cdot k^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma^{1-\frac{1}{n}} de - \frac{A}{Z} \sigma^m de$$

⋮

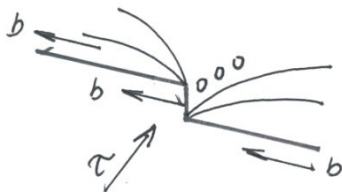
$$\dot{\epsilon} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \sigma_{ss}^k$$

Druhá analýza, která předpokládá šplh hranových dislokací vychází z názoru, že na hranovém úseku, který má dva zakotvené body, účinkem napětí τ mohou vznikat případně zanikat vakance mezi pružnými dislokačními smyčkami.

Celá analýza má celkem 4 části. Tou první částí je stanovení rychlosti změny hustoty dislokací při vzniku dislokací, druhá část spočívá ve stanovení tvorby vakancí, které vznikají na určitém zakotveném skoku, a je to vlastně růst počtu vakancí při zpevňování, třetí část je zaměřena na změny koncentrace vakancí s časem, tedy úbytku vakancí při kinetice daného děje a poslední čtvrtá část se zabývá úbytkem dislokací anihilací při šplhání. Výsledek samozřejmě lze stanovit pomocí srovnání těchto 4 dílčích částí a vede k ustanovení hustoty dislokací ρ_{ss} , která je funkcí Burgesova vektoru a poloměru smyčky okolo dislokace. Je to hustota dislokace v ustáleném stavu. Matematicky je pak tato závislost stanovena rovnicí opět jako funkce napětí (v tomto případě se matematicky pohybujeme v hodnotě rychlosti smykové deformace $\dot{\gamma}$). Tvar rovnice logicky odpovídá i výsledkům první analýzy.

$$\dot{\gamma} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \cdot \left(\frac{\tau_{ss}}{G}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Dostáváme se ke **třetí analýze**, která je nazvaná jako dynamické zotavení při pohybu skoků šroubových dislokací, kterou odvodil Barret a vychází z toho, že na šroubových dislokacích existují vakance. Skok, který neleží ve skluzové rovině, emituje nebo absorbuje vakance, příp. intersticiály. Skok je tedy krátký hranový úsek, vytváří brzdící sílu, kterou je nutné překonávat. V rovnovážném stavu pak dochází k ustálenému plastickému toku. Koncentrace vakancí je řízena rychlostí vzniku a pohybu od jednoho k druhému skoku. V okolí skoku je určitá hustota vakancí, ta vyplývá z rovnice, uveřejněné v kapitole o hustotě vakancí v materiálu.



Síla potřebná pro emitaci vakancí je uveřejněna v rovnici na levé straně a analogicky síla pro absorpci pak v pravé části textu. Postupnou úpravou, logaritmováním, můžeme vypočítat a stanovit hodnoty koncentrace emitujících a absorbujících vakancí.

$$F_e = \frac{kT}{b} \ln \frac{c_e}{c_0}$$

$$F_a = \frac{kT}{b} \ln \frac{c_0}{c_a}$$

$$\ln \frac{c_e}{c_0} = \frac{F_e \cdot b}{kT} \sim \frac{U}{kT} \sim \frac{Q}{RT}$$

$$c_e = c_0 \cdot \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)$$

$$c_a = c_0 \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

Rozdíl koncentrace vakancí c_{ess} vůči rovnovážné hodnotě c_0 je stanoven vztahem, kde v_e rychlost pohybu emitovaných vakancí a další proměnné v rovnici jsou koeficient samodifuze D_v a Burgessův vektor b , obě ve jmenovateli.

$$F_{ev} = \frac{kT}{b} \ln \left(1 + \frac{v_e}{4\pi D_v b^2 c_0} \right)$$

$$F_{av} = \frac{kT}{b} \ln \left(1 - \frac{v_a}{4\pi D_v b^2 c_0} \right)$$

Úpravou této rovnice dostaneme dvě síly pro emitaci a absorpci vakancí, které pak následně mezi sebou můžeme porovnat.

$$F = \tau_{ss} \cdot b \cdot \lambda = F_{ev} = F_{av}$$

Tím dosáhneme stavu analýzy při ustáleném plastickém toku a vydáme se vložím obecné znalosti pro sílu přemísťování vakancí v podobě $\tau_{ss} b \lambda$

$$\tau_{ss} b \lambda = \frac{kT}{b} \ln \left(1 + \frac{v_e}{4\pi D_v b^2 c_0} \right)$$

$$\vdots$$

$$v_e = 4\pi D_v b^2 c_0 \left(\exp \frac{\tau b^2 \lambda}{kT} - 1 \right)$$

$$v_a = 4\pi D_v b^2 c_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{\tau b^2 \lambda}{kT} \right) \right]$$

Další výpočet vypadá poněkud komplikovaně. Musíme do něj zahrnout hodnotu pro koncentraci vakancí, kde N je počet atomů v jednotce mřížky, X_0 je počet vakantních míst a ve jmenovateli je mřížková konstanta a^3 . Rovněž tak hodnota koeficientu difuze D_v se dá vyjádřit pomocí rychlosti v tomto případě rychlosti samodifuze D ve vztahu k počtu vakantních míst.

$$c_0 = \frac{N \cdot X_0}{a^3} \quad D_v = \frac{D}{X_0}$$

Hodnota velikosti rychlosti pohybu emitujících a absorbujících vakancí je stanovena

$$V_s = \alpha_e \cdot V_e + \alpha_q \cdot V_a \quad \alpha_e = \alpha_q = 0,5$$

Předpokládáme rovnovážný stav, to znamená, že každá z rychlostí je uplatněna svou polovinou a při následné úpravě pomocí

$$\dot{\gamma}_{ss} = \rho \cdot b \cdot V_s \Rightarrow V_s = \frac{\dot{\gamma}_{ss}}{\rho_{ss} \cdot b}$$

vyjádření pro rychlost smykové deformace a z toho vyplývající celková rychlost v_s nás vede prakticky ke konečnému výsledku pro rychlost deformace v rovnovážném stavu.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ss} &= \frac{1}{2} 4\pi DN \left(\frac{b}{a}\right)^3 \rho_{ss} \left[\exp \frac{\tau b^2 \lambda}{kT} - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} 4\pi DN \left(\frac{b}{a}\right)^3 \rho_{ss} \left[1 - \exp \left(- \frac{\tau b^2 \lambda}{kT} \right) \right] \\ \dot{\gamma}_{ss} &= 2\pi DN \left(\frac{b}{a}\right)^3 \rho_{ss} \left[\exp \frac{\tau b^2 \lambda}{kT} - \exp \left(- \frac{\tau b^2 \lambda}{kT} \right) \right] \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\exp(e) - \exp(-e)}{2} \end{aligned}$$

Tato rovnice vypadá nesmírně komplikovaně, s celou řadou různých konstant, které ovšem byly již dříve vysvětleny. Přicházíme tedy k rovnici, která, jak je nyní zřejmé, vznikla odvozováním z čistě fyzikálního přístupu a která připomíná svým tvarem matematickou rovnici pro sinus hyperbolický vztah. Tuto vlastnost využijeme při nahrazení hodnoty hustoty dislokací, která je obvykle dána funkcí napětí σ^3 a hodnotami pro rychlost smykové deformace a vztahem mezi normálovým a smykovým napětím.

$$\rho_{ss} = f(\sigma^3) \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\epsilon}}{2} \quad \tau = \frac{\sigma}{2}$$

Dostáváme konečnou rovnici podle Barretovy analýzy

$$\dot{\epsilon}_{ss} = 8\pi DN \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot \sigma_{ss}^3 \cdot \sinh\left(\frac{\sigma V}{2kT}\right)$$

$$\dot{\epsilon}_{ss} = A' \cdot \sigma_{ss}^p \cdot \sinh(B\sigma)$$

Rozdíl oproti původním dvěma analýzám spočívá v tom, že na pravé straně rovnice je napětí jednak k mocninné funkci a jednak v $\sinh$ funkci. Takováto matematická analýza vedoucí k regresi je velmi složitá ba nemožná.

Touto problematikou se zabývala skupina autorů, která se dá zkrátit do zkratky STG (Sellars, Tegart, Garofalo) a upravili stávající analýzy průběhu zotavení materiálu na tvar **čtvrté**, řekněme univerzální **rovnice**, kde je jednak aktivační energie procesu a napětí v sinus hyberbolickém tvaru. Analýza této rovnice je uvedena v následujících částech, má svou vnitřní logiku a je často poslední rovnicí pro napětí jako funkci celé řady parametrů používána.

$$\dot{\epsilon} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \left[\sinh(\alpha \sigma_{ss}) \right]^n$$

Postup je nyní následující. Nejprve si stanovme z experimentálních hodnot z plastometru ať už krutového (otáčky na momentu) nebo dnes už nejčastěji z plastometru tlakového Gleeble (změna výšky vzorečku vůči napětí) na válečcích nebo plochých zkouškách (PSCT – Plane strain compression test) tabulkové hodnoty závislosti a postupně začneme provádět lineární regresní analýzy

$$\begin{array}{ll} \alpha\sigma < 1 & \uparrow T \\ \dot{\epsilon} = A \cdot \sigma^n & \\ \ln \dot{\epsilon} = \ln A + n \ln \sigma & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha\sigma > 1 & \downarrow T \\ \dot{\epsilon} = A \cdot \exp(\beta\sigma) & \\ \ln \dot{\epsilon} = \ln A + \beta\sigma & \end{array}$$

$$\textcircled{\alpha} n = \beta$$

$$\begin{array}{l} \dot{\epsilon} = A \cdot \sinh(\alpha\sigma_{ss})^n \\ \ln \dot{\epsilon} = \ln A + n \ln \sinh(\alpha\sigma_{ss}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dot{\epsilon} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \\ \ln \dot{\epsilon} = \ln A - \frac{\textcircled{Q}}{R} \cdot \frac{1}{T} \end{array}$$

$$\dot{\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{Q}{RT}\right) = Z = A \cdot \sinh(\alpha\sigma_{ss})^n$$

$$\ln Z = \ln \textcircled{A} + \textcircled{n} \ln \sinh(\alpha\sigma_{ss})$$

$$\dot{\epsilon} = \textcircled{A} \cdot \exp\left(-\frac{\textcircled{Q}}{RT}\right) \sinh(\textcircled{\alpha}\sigma_{ss})^{\textcircled{n}}$$

Pro vysoké teploty předpokládáme, že hodnota součinu $\alpha\sigma \leq 1$ a za této situace se matematicky, lze to dokázat, rovnice transformuje do tvaru $\ln$ rychlosti deformace jako funkce $\ln$ napětí. Tyto jednotlivé postupně prováděné lineární regresní analýzy jsou znázorněny na souboru pěti obrázků na konci této kapitoly.

Pro nízké teploty, kde hodnoty $\alpha\sigma \geq 1$ je je pak ten $\ln$ rychlosti deformace funkcí přímo napětí. Analýzou těchto dvou rovnic dostaneme postupně dvě směrnice směrnici n a směrnici β a mezi nimi je vzájemný vztah uvedený v rovnici $\alpha \cdot n = \beta$.

Nyní se vrátíme k originální rovnici, ve které ovšem vynecháme vztah pro teplotu, (teplotu budeme považovat vždy v každém případě jako konstantní). Opět při logaritmování této rovnice dostaneme sadu více či méně rovnoběžných přímek, které jsou v závislosti na vodorovné ose, kde máme $\ln \sinh(\alpha\sigma_{ss})$.

Z třetího obrázku vyplývá nutnost nalézt hodnoty průsečíku těchto linek se svislou osou y , které si označíme postupně jako $\ln A_1$ až $\ln A_x$ podle teploty T_1 až T_x . (Jako příklad je uveden průsečík $\ln T_3$).

Přistoupíme ke čtvrtému kroku; návratem k původní rovnici, kde je sinus hyperbolický alfa sigma roven 1 a jeho přirozený logaritmus je roven nule. Pak se rovnice transformuje do následujícího tvaru a po logaritmování (na obrázku jako druhý graf vpravo dole) a následnou lineární regresní analýzou dostaneme zápornou směrnici $-Q/R$ ze které při znalosti plynové konstanty R , která je rovna $R = 8,314 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ vypočteme hodnotu aktivační energie Q (J/mol).

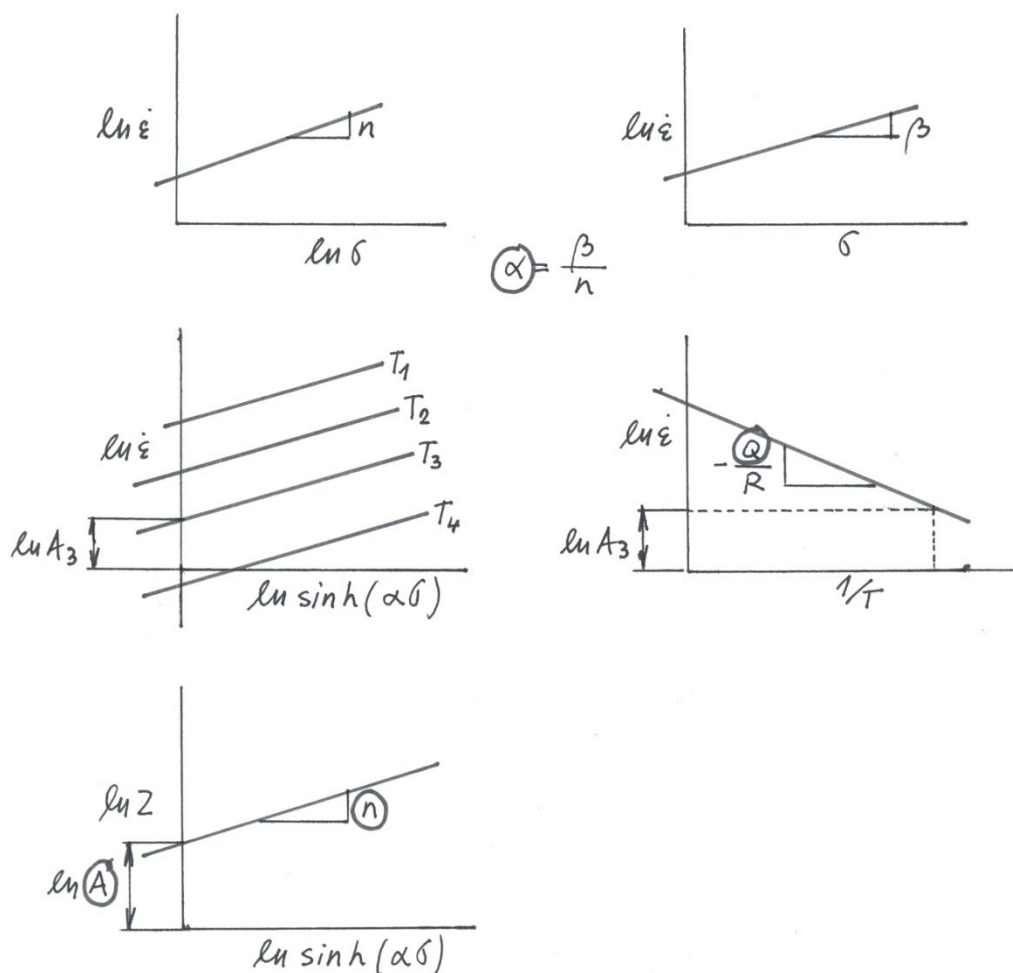
Celou analýzu můžeme ještě zakončit rovnicí pro Zenner-Hollomonův parametr, (teplotně kompenzovaná rychlost deformace (s^{-1})), který je dán na levé straně rovnice, následná regrese pak vede k exponentu n konstantě A (po odlogaritmování). Ve výsledné rovnici pro rychlost deformace pak uplatníme zjištěné konstanty A , Q , α a n . (Z důvodu přehlednosti jsou tyto konečné konstanty v kroužcích.)

Tuto rovnici ještě můžeme upravit na přepočet pro zjištění hodnoty napětí v závislosti na termomechanických parametrech, jako jsou rychlost deformace (skrytá v Z), aktivační energie Q , teplota T a konstanty A a exponent n podle tvaru této rovnice

$$\left[\frac{\dot{\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)}{A} \right]^{\frac{1}{n}} = \sinh(\alpha \sigma_{ss})$$

$$\sigma_{ss} = \sigma = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\dot{\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)}{A} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Z}{A} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Při využívání této závislosti již nemusíme striktně pracovat s hodnotou napětí ve steady-state, ale praxe ukazuje, že ji můžeme použít i pro jiná napětí. Rovněž tak se tato rovnice používá obecně pro popis změkčování, tedy odpevňování, které může být jako zotavování nebo rekrytalizace. Provedeme-li rozsah experimentálního zkoušení, který je při jistých konkrétních teplotách a konkrétních rychlostech deformace a dojdeme k matematickému vyjádření konstant, můžeme dosazením těchto konstant vypočítat hodnotu napětí, tzn. hodnotu deformačního odporu v jiných než experimentálních podmínkách. Dokonce můžeme a často se to provádí, extrapolovat tuto hodnotu do vyšších popřípadě nižších teplot nebo rychlostí deformací (obvykle pouze v jednom řádu) ovšem s tím, že nemůžeme přecházet do jiné strukturní fáze materiálu, kde ty podmínky průběhu dynamického zotavení jsou zcela jiné. Následné publikační výstupy a celá řada vyhodnocovaných experimentů vychází z této poslední rovnice také pro stanovení aktivační energie při statické i dynamické rekrytalizaci.



Shrnutí pojmů:

Stanovení závislosti napětí při zpevňování a odpevňování.

Výsledná rovnice pro rychlost deformace, nástin ostatních analýz a jejich výsledky.

Detailní analýza $\sinh$ vztahu.



Otázky:

jak se stanoví diferenciální přírůstek napětí při zpevňování a odpevňování,
jaké parametry se vyskytují v dalších uvedených rovnicích,
jak se vypořádáme se stanovením nové, univerzální rovnice,

co musíme provést při lineární regresi za nízkých (vysokých) teplot,
popište celý postup k dosažení hodnoty aktivační energie,
jaké konstanty a odkud se vyskytují v univerzální rovnici,
umíte určit hodnotu napětí jako funkci proměnných parametrů a konstant.

7. DYNAMICKÁ REKRYSTALIZACE

Členění kapitoly:



Vznik a růst zárodků.

Parametrická rovnice.



Čas potřebný ke studiu: 90 minut



Cíl:

Popsat fyzikální přístup k problematice zárodků v dynamicky deformované struktuře.

Stanovit vztah pro tepelně kompenzovaný čas.



VÝKLAD

Tato kapitola bude mít poněkud jiný tvar v grafice, budou výjimečně chybět některé obrázky a i některé rovnice. Bude pouze komentář, který bude na přednáškách doplněn grafickým výstupem.

Dynamická rekrystalizace, jak již bylo řečeno je typická pro kovy či slitiny s nízkou energií vrstevné chyby, mezi ně patří např. Cu, Ni, u Fe je to austenit, k dosažení píkového napětí nemusí být její velikost vyšší než u dynamického zotavení, ale obvykle je to při vyšší deformaci. Po dosažení kritické hodnoty napětí dochází ke vzniku zárodků v deformovaném stavu. Z hlediska skutečného stavu je ten zárodek již iniciován před maximální hodnotou píkového napětí, ale z hlediska experimentální techniky na zkouškách na plastometrech se obvykle za počátek dynamické rekrystalizace považuje dosažení takové deformace, která je reprezentována maximálním píkovým napětím. Z literatury je známo, že za kritickou hodnotu deformace pro vznik zárodků můžeme považovat $0,8 \, e_p$.

Zárodek má kritickou velikost, roste, současně vznikají zárodky jiné, postupně vyplňují zrno, tyto nové zárodky se začínají bránit růstu a postupně vyplní původní strukturu, pokud se dále provozuje deformace. Rychlost rekrystalizace je přímo úměrná době rychlosti posunutí těchto hranic nových zárodků. Hnací silou je rozdíl v hustotě dislokací v deformovaném a novém zrně. V tom novém zrně je hustota dislokací pochopitelně nízká. Rekrystalizované zrno, které vyplní původní deformované zrno při opakované a probíhající deformaci se znovu deformuje, znovu roste, znovu rekrystalizuje, zejména ve směru převládající deformace, roste a zároveň klesá hustota dislokací, a tento proces je nazýván ustáleným tokem, kde vzájemně bojuje proti sobě zpevňování a uzdravování materiálu pomocí rekrystalizace. Je to možné znázornit i tak, že pokud rychlost rekrystalizace je podstatně větší než rychlost deformace tak dochází k cyklickému průběhu s jakýmsi útlumem rozkmitané křivky. V případě, že rychlost rekrystalizace je menší než rychlost deformace tak je to postupný pokles až do ustáleného toku kovu (steady-state). Ještě jednou - je to boj mezi anihilací dislokací což je rekrystalizace a zvyšování počtu dislokací růstem její hustoty, což je zpevňování materiálu.

Tato analýza opět byla provedena matematicky a její průběh je možné rozdělit do několika částí. Za prvé je to vznik zárodku modelově na hranici zrna, kde v zárodku je hustota dislokací $\rho = 0$ a v zrně je hustota dislokací ρ_0 . Povrchová energie zárodku aby nezankuloval se musí rovnat celkové energii dané zpevňováním kovu a představením jakési kritické hodnoty hustoty dislokací. Docházíme tedy postupně z celkové energie dislokace a jako prvním výsledkem je velikost kritického zárodku d^* . Následuje pak analýza pohybu hranice zrna zárodku tedy její mobility a rychlosti. Pro další výpočet je nutné zjistit tzv. činný podíl hranice zrna, protože ne všechny úseky hranice zrna jsou potenciálními místy, kde mohou vznikat zárodky. Následuje stanovení podílu objemu kovu s určitou hodnotou hustoty dislokací a poté kinetika, resp. rychlost dynamické rekrystalizace. Problém je také to, že před dynamickou rekrystalizací lze stanovit jistý podíl uzdravení pomocí zotavení materiálu. Postupně tedy docházíme k času potřebnému pro nastavení hustoty dislokací až po velmi složité a komplikované rovnice, které vycházejí z popisu křivky napětí-deformace a ve které se vyskytuje celá řada různých hodnot hustoty dislokací. Tato analýza dokonce vede k $\tan h(x)$ ke kterému nás dovedla tato matematická analýza. Výsledek je čistě fyzikální, teoretický, v oblasti naší problematiky by zasahoval pouze v případě hluboké možnosti zjišťování hustot dislokací, což je již nad obsah naší plasticity *(je tedy hodně textu?, ano, přesto se ho snažte pochopit a říct si ho vlastními slovy)*.

Přesto můžeme kinetiku dynamické rekrytalizace popsat matematicky. Vycházíme z toho, že pro statickou rekrytalizaci potřebujeme znát vliv deformace, rychlosti deformace, teploty a aktivační energie, kdežto pro dynamickou k tomu přistupuje ještě funkce závislosti kritické hodnoty hustoty dislokací jako funkce píkového napětí

$$\sigma_p = \alpha G b \sqrt{\rho_{cr}}$$

Můžeme tedy píkové napětí σ_p popsat rovnicí ve vztahu k času pro dosažení píku t_p

$$t_p = C_0 \cdot \exp\left(\frac{Q_{rd}}{RT}\right) \cdot \sigma_p^{-d}$$

Tuto hodnotu času do píku můžeme popsat hodnotou teplotně kompenzovaného času W , je to obdoba Zenner-Hollomonova parametru, který je teplotně kompenzovanou rychlostí deformace (s) a lze ji popsat touto rovnicí

$$t_p \cdot \exp\left(-\frac{Q_{rd}}{RT}\right) = W_p = C_0 \cdot \sigma_p^{-d} = C_0^* \cdot \sinh(\alpha \sigma_p)^{-d^*}$$

Výsledkem je tzv. parametrická rovnice v podobě tvaru

$$W_p = A_p \cdot Z^{-a_p} \quad W_{ss} = A_{ss} \cdot Z^{-a_{ss}}$$

která je buď pro píkovou deformaci a píkové napětí nebo pro stedy-steady deformaci a hodnotu napětí v ustáleném plastickém toku. Úprava této rovnice je poměrně jednoduchá, čas do píku můžeme vyjádřit tímto způsobem v závislosti na Zenner-Hollomonově parametru a při znalosti vztahu mezi deformací, deformační rychlostí a časem je možné tuto hodnotu pro velikosti dosažení deformace na píku znázornit daným vztahem

$$t_p \cdot \exp\left(-\frac{Q_{rd}}{RT}\right) = A_p \cdot \dot{\epsilon}^{-a_p} \cdot \exp\left(\frac{Q_{rd}}{RT}\right)^{-a_p}$$

$$t_p = A_p \cdot \dot{\epsilon}^{-a} \cdot \exp\left(\frac{Q_{rd}}{RT}\right)^{1-a}$$

$$\epsilon_p = t_p \cdot \dot{\epsilon}$$

$$\epsilon_p = W \cdot Z = A_p \cdot Z^{1-a}$$



Shrnutí pojmů:

Názor na dynamickou rekrytalizaci.



Otázky:

za jakých podmínek vzniká dynamická rekrytalizace,
je rozdíl mezi metalografickým a plastometrickým postupem,
jak vzniká a roste dynamický zárodek,
co je to tepelně kompenzovaný čas,
dá se kinetika děje vyjádřit i deformací do píku.



Druhá odměna a odpočinek

Očekávali jste jednoduchý způsob, jak se tématu plasticita naučit? Nebuďte zkloušeni, jednak je ještě hodně času a jednak už začínáte chápat, že odvozování rovnic není smyslem!! I když ke zkoušce je tato znalost matematických postupů nutná. V každé z kapitol je slovní úvod, myšlenka, vstupní údaje (většinou bohužel matematicky) a spíše je nutné pochopit co se v materiálu děje při daných procesech. Jsem přesvědčen – téměř -, že v reálné technologické praxi, (při řízení konkrétní válcovací tratě, stanovení parametrů lisu či bucharu, dokonce ani při kalibračních schématech) nebudete potřebovat umět odvození rovnice pro popis, řekněme, dynamického zotavení nebo rekrytalizace. Ale někde v koutku duše by ve vás mělo zůstat, že, opět příklad, stupeň X podílu rekrytalizace na něčem závisí. (co je to X ? jste zvědaví a dozvíte se v následující kapitole). Při konzultaci s odborníky jiných profesí, při expertní činnosti, při návštěvě zahraničních odborníků, při sestavování návrhů na nová moderní zařízení, při vědecké práci a studiu moderní zahraniční literatury a dalších činnostech, ke kterým se v životě dostanete, budou vám tyto zasuté znalosti k dobru. A když si vzpomenete, že jste to v nějaké opoře i viděli, tak sláva.

8. STATICKÁ REKRYSTALIZACE

Členění kapitoly:



Matematická pravděpodobnost vzniku zárodku.

Kinetika statické rekrystalizace a Avramiho rovnice.

Vliv teploty a rychlosti deformace na Avramiho křivku.



Čas potřebný ke studiu: 90 minut



Cíl:

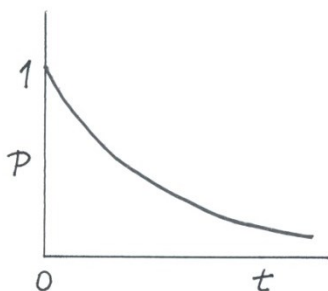
Předvést finální rovnici pro podíl rekrystalizované struktury.

Pochopit Avramiho rovnici.



VÝKLAD

Matematický model je založen na pravděpodobnosti vzniku zárodku a jeho růstu, což je schematicky na obrázku



Matematická analýza vede ve svém konci k Avramiho rovnici. Vycházíme z pravděpodobnosti vzniku zárodků P a jdeme vlastně hluboce do teorie pravděpodobnosti. V případě času 0 nevznikne zárodek a pravděpodobnost, že nevznikne se rovná 1. Je to

exponenciální křivka, při nekonečném počtu zárodků se pravděpodobnost vzniku zárodků blíží 0.

$$P = \exp(-ct) = \exp(-N)$$

$$N=0 \Rightarrow P=1 \quad N \rightarrow \infty \Rightarrow P=0 \quad N=1 \Rightarrow P=0,36$$

Pro vznik prvního zárodku je pravděpodobnost, že nevznikne 0,36, matematicky vycházíme z exponenciální rovnice.

Růst zárodků; když zůstaneme u prvního zárodku pak musíme vypočítat objem kovu, který bude mít v sobě daný rekrystalizovaný zárodek, rychlost předpokládáme jako lineární a i ten zárodek ve tvaru koule je idealizovaný.

$$V_z = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi v^3 t^3$$

$$V_r = \int_0^t \frac{4}{3}\pi v^3 t^3 c dt = \frac{\pi}{3} v^3 c t^4$$

$$P = \exp(-N) = \exp\left(-\frac{\pi}{3} c v^3 t^4\right)$$

$$X = f = 1 - P$$

Ten zárodek V_z bude mít tedy objem koule o poloměru r a bude-li jich vznikat více pak provedeme v čase od 0 do t integraci a ve výsledné rovnici už je čas jako t^4 . Je-li tedy pravděpodobnost popsaná rovnicí daného typu, potom podíl uzdravené struktury, v tomto případě rekrystalizované struktury, označovaný nejčastěji jako X je $1-P$ a docházíme k upravené rovnici ve tvaru

$$X = 1 - \exp(-k t^n)$$

$$k = k_0 \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

Teoreticky bychom měli připustit i jakýsi inkubační čas t_0 . Ačkoli většinou pracujeme s hodnotou k jako konstantou, je minimálně funkcí teploty.

Avramiho rovnice je nejčastěji používanou rovnicí v dané problematice kinetiky statické rekrystalizace. Křivka, která popisuje tuto závislost je nazývána křivkou sigmoidální a aproximativně se blíží nule pro minimální časy a v jedničku pro časy veliké. Na vodorovné ose je čas v podobě $\ln t$. Úprava vede k možnosti stanovení hodnoty X ve dvojnásobné logaritmické podobě na čase $\ln \ln\left(\frac{1}{1-X}\right)$ a bude představena zpětně

odvozením onoho dvojitého logaritmického vztahu na přednáškách. Z toho důvodu není v této části opory obrázek.



Shrnutí pojmů:

Matematická teorie pravděpodobnosti.

Objem rekrystalizovaného podílu.

Avramiho rovnice a grafické zobrazení.



Otázky:

jaká je pravděpodobnost vzniku zárodku,

jakého tvaru může zárodek být,

jaký je finální vztah pro podíl uzdravení,

nakreslete Avramiho křivku v sigmoidální i přímkové podobě,

jak se projevuje vliv základních termomechanických parametrů na tvar a posunutí křivky.

9. DIFUZNÍ MECHANISMUS PLASTICKÉ DEFORMACE



Členění kapitoly:

Vakanční mechanismus plastické deformace.

Viskosní a dislokační mechanismus.



Čas potřebný ke studiu: 90 minut



Cíl.

Určit vlivy termomechanických parametrů na relaxační děje.



VÝKLAD

Za vysokých teplot a nízkých rychlostí deformace se začíná projevovat jiný mechanismus plastické deformace než mechanismus dislokační kluzový a to mechanismus difuzní. Zatímco difuzní mechanismus je založen na existenci vakancí, tak ten klasický, který jsme probírali dříve, skluzový, potřebuje ke své existenci dislokace.

Difuzní mechanismus je podán jako teorie relaxace, která je vyjádřena základní rovnicí, ve které se jako konstanta objevuje T_r a v tomto případě to nemá nic společného s teplotou a je to tzv. konstanta relaxace je to vlastně čas (s) a podle součinu modulu pružnosti E a této konstanty relaxace dostaneme viskozitu materiálu η

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T_r}$$

$$E \cdot T_r = \eta \quad [\text{Pa} \cdot \text{s}]$$

Je to vlastně vysokoteplotní difuze, a někdy se také tento mechanismus objevuje jako nízkoteplotní creep. Ty představy o tom jak to vlastně probíhá v materiálu se samozřejmě liší podle různých autorů. Vakance se mohou přemísťovat přes mřížku,

dochází k jistému pokluzu po hranicích zrn a přemísťování atomů z jiných hranic přes zrna. Případně je to pouze difuze podél hranic zrn, která je při relativně nižších teplotách.

Matematickou analýzou můžeme dospět k tomu, že když čas relaxace je velmi vysoký, blíží se nekonečnu, druhý člen rovnice je zanedbatelně malý

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \sigma = E \cdot e$$

a poté se celá rovnice transformuje do jednoduché podoby klasického Hookova zákona, kde napětí je součinem deformace a modulu pružnosti (deformace je vyjádřené buď jako smyková deformace, poměrná nebo jako skutečná deformace – pro stanovení hodnoty Youngova modulu pružnosti E vždy jako skutečná e).

Jinak platí také závislost mezi rychlostmi relaxace v podobě

$$\frac{d\sigma}{dt} = v_r \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = v_d \quad v_r = E \cdot v_d$$

Druhou možností je situace, kdy čas relaxace je velmi krátký a poté mohou nastat různé situace. Ta první je situace, kdy napětí je konstantní. Opět při úpravě rovnice dostaneme tvar

$$\sigma = \text{konst} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = 0 = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T_R}$$

kdy podíl diferenciálního vztahu napětí vůči času je téměř nulový a výsledná hodnota napětí je součinem viskozity a rychlosti deformace

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

Při stejně krátkém času relaxace však může nastat situace kdy deformace je konstantní, poté ta celá matematická úprava je poměrně složitá a vede až k exponenciálnímu vztahu

$$\varepsilon = \text{konst} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{T_R}$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = -\int \frac{dt}{T_R} \quad \sigma = \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_R}\right)$$

Vliv podmínek tváření, zejména tedy rychlosti deformace a teploty na uplatnění difuzního mechanismu bude rovněž představen na přednáškách a to z toho důvodu, že k tomuto diagramu by měla vést částečně i samostatná úvaha studentů, kteří by již na základě známých skutečností o dislokačním a difuzním mechanismu mohli tento graf sami navrhnout.

Matematické vyjádření v závěru vede ke vztahům

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - E \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

kde jakoby podíl jednotlivých mechanismů je stanoven podle přírůstků diferenciálních vztahů a to první části, která je jakoby dislokační a druhé části, která odpovídá mechanismu difuznímu.

Pro zapamatování si vlivu viskozity použijeme mnemotechnického znázornění - vyplývá, že při zvyšování viskozity materiálu, která se objevuje při snižování teploty je podíl ve zlomku, kde nahoře je deformační napětí a dole viskozita blízké 0 a z toho vyplývá, že průběh plastické deformace je popsán spíše Hookovým zákonem. Na druhé straně při nízké viskozitě, tzn. při vysokých teplotách se ten mechanismus dislokační uplatňuje velmi málo a převážná část plastické deformace probíhá difuzí

$$\begin{aligned} \uparrow \eta &\Rightarrow \downarrow T \Rightarrow \frac{\sigma}{\eta} \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma = E\varepsilon \\ \downarrow \eta &\Rightarrow \uparrow T \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \\ \uparrow \dot{\varepsilon} &\Rightarrow \uparrow \frac{d\sigma}{dt} \text{ i } \frac{\sigma}{\eta} \rightarrow 0 \\ \downarrow \dot{\varepsilon} &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} \rightarrow 0 \Rightarrow \uparrow \frac{\sigma}{\eta} \end{aligned}$$

Je také zapotřebí analyzovat vliv rychlosti deformace, kdy při vysokých rychlostech deformace je vysoký přírůstek hodnoty zpevnění a z toho vyplývá, že difuzní mechanismus ztrácí svou působnost a naopak při velmi nízkých rychlostech deformace, resp. snižování rychlosti deformace vliv difuzního mechanismu narůstá.



Shrnutí pojmů:

Čas relaxace, viskozita a Hookův zákon.

Vliv diferenciálních podílů napětí a deformace vůči času.



Otázky:

z jakých členů se skládá základní rovnice,

s čím souvisí čas relaxace,

jak vypadá graf závislosti různých mechanismů na teplotě a rychlosti deformace,

jak lze původní rovnici upravit za změněných podmínek tváření,

jak se dělí rovnice na dvě části,

jak lze popsat schematicky vliv viskozity a rychlosti deformace.

P.S. Pokud v této opoře objevíte chybu, a bylo by naprosto nepravděpodobné, že by tam nebyla a jistě nejenom jedna, upozorněte autora, aby na ně další studenty připravil, - já už sám jednu našel na obrázku na str. 8.

Děkuji.

autor



ÚKOL

2. Aktivační energie a tvařitelnost

Klíčová slova

teplota, deformace, deformační rychlost, zkouška krutem, lineární regrese, aktivační energie, tvařitelnost na píku, mezní tvařitelnost

2.1 Teoretický úvod

Pro tento typ programu využijte přednášek a kapitoly 6. ANALÝZA DYNAMICKÉHO ZOTAVENÍ.

2.2 Zadání (Aktivační energie)

Sestavte program, respektive stanovte aktivační energii Q (J/mol) tvářecího procesu. Zadané hodnoty jsou:

teplota T (K) - rozsah do 10 hodnot; rychlost kroucení u krutové zkoušky $\dot{\gamma}$ (min^{-1}) - rozsah do 10 hodnot; počet otáček na píku N_p (-) - rozsah do 100 hodnot; moment na píku M_p (N.mm) - rozsah do 100 hodnot.

Vypočtete:

2.2.1 Intenzitu rychlosti deformace na píku

$$S_{ep} = \frac{\dot{N}}{N_p} \frac{2}{\sqrt{3}} \arg \sinh \frac{\gamma}{2} \quad \gamma = \frac{\pi \bar{D} N_p}{L} \quad \bar{D} = 4 \text{ mm}; \quad L = 50$$

mm; $\dot{N} = \frac{o}{60}$

2.2.2 Intenzitu napětí na píku

$$S_{op} = \frac{3 \sqrt{3} M_p}{2 \pi R^3} \quad R = 3 \text{ mm}$$

Sestavte lineární regrese:

2.2.3 $\ln S_{ep} = f(\ln S_{op})$

směrnici označte n_T

2.2.4 $\ln S_{ep} = f(S_{op})$

směrnici označte β

2.2.5

určete $\alpha = \frac{\beta}{n_T}$

2.2.6 $\ln S_{ep} = f[\ln \sinh(\alpha \cdot S_{op})]$

pro všechny teploty, určete

průsečíky s osou y pro $[\sinh(\alpha \cdot S_{op})] = 1$;

označte A_l až A_n

2.2.7 A_l až $A_n = f\left(\frac{1}{T}\right)$

směrnice je $-\frac{Q}{R} = S$

$Q = -8,314 \cdot S$

2.2.8 $\ln S_{ep} + \frac{Q}{RT} = f[\ln \sinh(\alpha \cdot S_{ep})]$ jako jedinou přímkou, směrnici
označte n , průsečík s osou y je $\ln A$
Sestavte závěrečný vztah:

2.2.9
$$S_{ep} = A \cdot \exp \frac{-Q}{RT} \sinh(\alpha \cdot S_{ep})^n$$

Proveďte tabulkové a grafické zpracování, na základě známých konstant v poslední rovnici (A, Q, α, n) upravte rovnici na tvar $S_{ep} = \dots\dots\dots$, vypočtete a tyto hodnoty označte jako teoreticky vypočtené S_{ep-t} a porovnejte v tabulce s experimentálně naměřenými z kroutícího momentu.

2.3 Zadání (Tvařitelnost na píku)

Sestavte program, respektive stanovte tvařitelnost na píku S_{ep}

Zadané hodnoty jsou:

teplota T (K) - rozsah do 10 hodnot; rychlost kroucení u krutové zkoušky $\dot{\gamma}$ (min^{-1}) - rozsah do 10 hodnot; počet otáček na píku N_p (-) - rozsah do 100 hodnot

Vypočtete:

2.3.1 Intenzitu rychlosti deformace na píku

$$S_{ep} = \frac{\dot{N}}{N_p} \frac{2}{\sqrt{3}} \arg \sinh \frac{\gamma}{2} \quad \gamma = \frac{\pi \bar{D} N_p}{L} \quad \bar{D} = 4 \text{ mm}; \quad L = 50$$

mm; $\dot{N} = \frac{\dot{\gamma}}{60}$

2.3.2 Intenzitu deformace na píku

$$S_{ep} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arg \sinh \frac{\gamma}{2}$$

Sestavte lineární regrese:

2.3.3 $\ln S_{ep} = f(\ln S_{ep})$ směrnice pro různé teploty

označte K_l až K_n , vypočtete průměrnou směrnici a označte k

2.3.4 $\sinh(\ln S_{ep} - k \cdot \ln S_{ep}) = f\left(\frac{1}{T}\right)$ směrnici označte X a průsečík s osou y označte Y

Sestavte závěrečný vztah

2.3.5
$$S_{ep} = S_{ep}^k \exp \arg \sinh \left(Y - \frac{X}{T} \right)$$

Proveďte tabulkové a grafické zpracování, na základě známých konstant v poslední rovnici (k, Y, X) vypočítejte tyto hodnoty tvařitelnosti na píku, označte jako teoreticky vypočtené S_{ep-t} a porovnejte v tabulce s experimentálně naměřenými z počtu otáček na píku.

2.4 Zadání (Mezní tvařitelnost)

Sestavte program, respektive stanovte mezní tvařitelnost S_{ef}

Zadané hodnoty jsou:

teplota T (K) - rozsah do 10 hodnot; rychlost kroucení u krutové zkoušky $\dot{\gamma}$ (min^{-1}) - rozsah do 10 hodnot; počet otáček do lomu N_f (-) - rozsah do 100 hodnot

Vypočtete:

2.4.1 Intenzitu rychlosti deformace do lomu

$$S_{ef} = \frac{\dot{N}}{N_f} \frac{2}{\sqrt{3}} \arg \sinh \frac{\gamma}{2} \quad \gamma = \frac{\pi \bar{D} N_f}{L} \quad \bar{D} = 4 \text{ mm}; \quad L = 50$$

mm; $\dot{N} = \frac{\dot{\gamma}}{60}$

2.4.2 Intenzitu deformace do lomu

$$S_{ef} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arg \sinh \frac{\gamma}{2}$$

Sestavte lineární regrese:

2.4.3 $\ln S_{ef} = f(\ln S_{ef})$

směrnice pro různé teploty

označte a_1 až a_n , vypočtete průměrnou směrnici a označte a , průsečíky s osou y pro $x = 0$ pro různé teploty označte A_1 až A_n

2.4.4 A_1 až $A_n = f\left(\frac{1}{T}\right)$

směrnice je $\frac{a \cdot Q}{R}$, určete Q ,

průsečík s osou y pro $x = 0$ je $\ln A$, určete A

Sestavte závěrečný vztah

2.4.5 $S_{ef} = A \cdot S_{ef}^a \exp\left(-\frac{a \cdot Q}{RT}\right)$

Sestavte lineární regresi:

2.4.6 $\sinh(\ln S_{ef} - a \cdot \ln S_{ef}) = f\left(\frac{1}{T}\right)$

směrnici označte X_m a průsečík

s osou y označte Y_m

Sestavte závěrečný vztah

2.4.7 $S_{ef} = S_{ef}^a \exp \arg \sinh\left(Y_m - \frac{X_m}{T}\right)$

Proveďte tabulkové a grafické zpracování, na základě známých konstant v poslední rovnici (a, Y_m, X_m) vypočítejte tyto hodnoty mezní tvařitelnosti, označte jako teoreticky vypočtené S_{ef-t} a porovnejte v tabulce s experimentálně naměřenými z počtu otáček do lomu.

P.S. Tento bod pro mezní tvařitelnost pouze po zadání hodnot otáček do lomu.

Tabulka 1. Experimentální hodnoty z krutových zkoušek

Ocel označení	$T_{ohřev}$ [°C]	T_{zk} [°C]	ω [min ⁻¹]	M_p [Nmm]	N_p [ot]
X5/5	1150	1150	2000	4250	2,73
/30			500	2120	2,08
/25			100	2280	2,26
/10			28	2120	2,20
/5			1,1	1300	2,00
X5/4	1050	1050	2000	6000	2,83
/19			500	5000	2,75
/24			100	4200	2,54
/19			28	3920	2,58
/14			1,1	2500	2,23
X5/3	950	950	2000	10300	3,30
/18			500	9700	3,25
/23			100	8260	2,91
/8			28	6500	2,75
/13			1,1	4150	2,60
X/2	850	850	2000	11800	3,83
/17			500	11200	3,33
/22			100	10600	3,34
/7			28	9000	3,25
/12			1,1	6200	3,83
3	1000	1000	1600	3950	4,0
			160	2900	2,4
			16	2100	1,5
			1,6	1350	0,7
3	900	900	1600	5350	5,9
			160	4000	3,6
			16	3200	2,3
			1,6	2150	1,6
3	850	850	1600	6200	1,6
			160	5300	4,7
			16	4000	2,9
			1,6	2850	2,0

Ocel označení	T _{ohřev} [°C]	T _{ZK} [°C]	o [min ⁻¹]	M _p [Nmm]	N _p [ot]
3	825	825	1600	6600	6,9
			160	5000	5,6
			16	4000	3,5
			1,6	3450	3,0
3	800	800	1600	6700	8,5
			160	6000	6,1
			16	4100	4,8
			1,6	3450	3,0
15.1	1150	1150	2000	2600	3,0
			500	2020	1,17
			100	1630	1,04
			28	1300	1,00
			1,1	590	0,85
15.1	1050	1050	2000	3500	4,00
			500	3000	1,99
			100	2350	1,20
			28	1850	1,28
			1,1	1000	1,09
15.1	950	950	2000	4800	4,2
			500	3920	1,83
			100	3120	1,53
			28	2550	1,42
			1,1	1550	1,40
15.1	850	850	2000	6300	4,6
			500	5580	2,99
			100	4700	1,72
			28	3460	1,78
			1,1	1920	1,70
15.1	750	750	2000	6820	5,33
			500	5900	2,99
			100	4900	2,8
			28	3950	2,3
			1,1	2200	1,95

2.5 Návod

ad 2.2 až 2.4 Zadání tohoto typu lze řešit počítačově (Excel, Mathcad, Origin či jakýkoli jiný,) postupným sestavováním regresí, (pro pochopení a samostatné provedení nelze použít program Energy), výpočtem konstant a grafickými výstupy. Bude zadána jedna ocel podle tabulky. (Pro výpočet mezní tvařitelnosti budou hodnoty zadány dodatečně).